5 Romgeometri

OPPGAVEHEFTE · MATEMATIKK R2

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler. Fasiten står bakerst.

Formelark

PUNKTER OG VEKTORER

Avstand

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Vektor og lengde

$$\overrightarrow{AB} = B - A, \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

SKALARPRODUKT OG VEKTORPRODUKT

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = [a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1]$$

Areal og volum

$$A_\triangle = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|, \quad V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

LINJER, KURVER OG PLAN

Linje

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v}$$

Fart og akselerasjon

$$\vec{v} = \vec{r}\,', \quad \vec{a} = \vec{r}\,''$$

Plan

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Skjæring av to plan

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

VINKLER OG AVSTANDER

Vinkel mellom linjer og mellom plan

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Vinkel mellom linje og plan

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}||\vec{v}|}$$

Avstand punkt–plan

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Avstand punkt–linje

$$\frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\right|}{|\vec{v}|}$$

KULEFLATER

Kuleflate

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Skjæringssirkel

$$\sqrt{r^2 - d^2}$$

5.1.1 Koordinater i rommet

EKSEMPEL *Punkter og plan*

Hvilket koordinatplan ligger punktet P(3, 0, 5) i? Hva er projeksjonen av P ned på xy-planet?

Løsning

Siden $y = 0$, ligger P i xz-planet. Projeksjonen ned på xy-planet har $z = 0$ og er $(3, 0, 0)$. ∎

EKSEMPEL *Avstand og midtpunkt*

Finn avstanden mellom A(1, 2, 3) og B(4, 6, 15), og midtpunktet.

Løsning

Differansene er 3, 4 og 12. Avstanden er

$$|AB| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Midtpunktet er $M = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{2+6}{2}, \frac{3+15}{2}\right) = (2{,}5; 4; 9)$. ∎

EKSEMPEL *Er trekanten rettvinklet?*

Punktene er A(1, 0, 0), B(1, 3, 0) og C(1, 3, 4). Er trekanten ABC rettvinklet?

Løsning

$|AB| = \sqrt{0 + 9 + 0} = 3$, $|BC| = \sqrt{0 + 0 + 16} = 4$ og $|AC| = \sqrt{0 + 9 + 16} = 5$. Siden $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$, er trekanten rettvinklet, med den rette vinkelen i B. ∎

EKSEMPEL *Kvaderets diagonal*

Et rom er 5 m langt, 4 m bredt og 3 m høyt. Hvor langt er det fra et nedre hjørne til det motstående øvre hjørnet?

Løsning

Med hjørnene O(0, 0, 0) og (5, 4, 3) er avstanden $\sqrt{25 + 16 + 9} = \sqrt{50} \approx 7{,}07$ m. ∎

5.1 Finn avstanden mellom

a) A(1, 2, 2) og B(4, 6, 14)

b) C(−1, 0, 5) og D(2, 4, 5)

c) E(0, 0, 0) og F(1, 2, 2)

5.2 Finn midtpunktet mellom

a) A(2, 4, 6) og B(6, 0, 2)

b) C(−3, 5, 1) og D(7, −1, 9)

5.3 Hvilke koordinatplan ligger punktene i?

a) (0, 3, −2)

b) (5, 0, 1)

c) (2, 4, 0)

5.4 Hva er projeksjonen av punktet P(3, −2, 7) ned på xy-planet, på xz-planet og på yz-planet?

5.5 Hva er avstanden fra origo til punktet (2, 3, 6)? Hva er avstanden fra punktet til xy-planet?

5.6 Et rom er 6 m langt, 3 m bredt og 2 m høyt. Hvor langt er det fra ett hjørne i gulvet til motsatt hjørne i taket?

5.7 Avgjør om trekanten A(0, 0, 0), B(2, 2, 1), C(2, −1, −2) er rettvinklet.

5.8 Punktene er A(1, 2, 3) og B(3, 6, z). Finn z slik at $|AB| = 6$.

5.9 Punktet M(2, 1, 4) er midtpunktet mellom A(0, −1, 2) og B. Finn B.

5.10 Tre hjørner i et parallellogram ABCD er A(1, 1, 0), B(4, 2, 1) og C(5, 5, 3). Finn D.

5.11 Alle punkter i rommet har avstand 5 fra origo. Hvilken figur danner de, og hva er likningen?

5.12 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import sqrt
A = (0, 0, 0)
B = (2, 3, 6)
print(sqrt(sum((b - a)**2 for a, b in zip(A,
B))))
```

5.13 Skriv et program som regner ut midtpunktet mellom to punkter i rommet, og bruk det på A(2, 4, 6) og B(6, 0, 2).

5.14 Forklar hvorfor avstandsformelen i rommet følger av Pythagoras to ganger.

5.1.2 Vektorer i rommet

EKSEMPEL *Vektor mellom to punkter*

Finn $\overrightarrow{AB}$, lengden $|\overrightarrow{AB}|$ og enhetsvektoren i retning $\overrightarrow{AB}$ når A(1, 2, 3) og B(4, 6, 15).

Løsning

$\overrightarrow{AB} = [3, 4, 12]$ og $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$. Enhetsvektoren er

$$\frac{1}{13}[3, 4, 12] = \left[\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right]$$

∎

EKSEMPEL *Sum og differanse*

La $\vec{a} = [1, 2, 3]$ og $\vec{b} = [2, 0, -1]$. Finn $\vec{a} + \vec{b}$ og $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Løsning

$\vec{a} + \vec{b} = [3, 2, 2]$ og $2\vec{a} - 3\vec{b} = [2 - 6, 4 - 0, 6 + 3] = [-4, 4, 9]$. ∎

EKSEMPEL *Parallelle vektorer*

Er $\vec{a} = [2, -4, 6]$ og $\vec{b} = [-1, 2, -3]$ parallelle? Finn t slik at $[t, 4, -2]$ er parallell med $[3, 6, -3]$.

Løsning
$\vec{a} = -2\vec{b}$: $2 = -2\cdot(-1)$, $-4 = -2\cdot 2$ og $6 = -2\cdot(-3)$. Ja, de er parallelle.

For $[t,4,-2] = s\,[3,6,-3]$ må $4 = 6s$, altså $s = \frac{2}{3}$. Da er $-2 = \frac{2}{3}\cdot(-3)$ ✓ og $t = \frac{2}{3}\cdot 3 = 2$. ∎

EKSEMPEL *Kollineære punkter*
Ligger $A(1,1,1)$, $B(2,3,5)$ og $C(4,7,13)$ på en rett linje?

Løsning
$\overrightarrow{AB} = [1,2,4]$ og $\overrightarrow{AC} = [3,6,12] = 3\,\overrightarrow{AB}$. Vektorene er parallelle og starter i samme punkt, så punktene ligger på en rett linje. ∎

EKSEMPEL *En tredjedel av veien*
Finn punktet P på AB med $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ for $A(1,2,3)$ og $B(4,6,15)$.

Løsning
$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}[3,4,12] = \left[1,\frac{4}{3},4\right]$, så $P = \left(2,\frac{10}{3},7\right)$. ∎

5.15 Finn $\overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{AB}|$ og midtpunktet av AB for $A(1,0,2)$ og $B(4,4,14)$.

5.16 Regn ut lengdene.

a) $[1,2,2]$

b) $[4,-4,7]$

c) $[0,5,12]$

5.17 La $\vec{a} = [2,-1,3]$ og $\vec{b} = [-1,4,2]$. Finn

a) $\vec{a}+\vec{b}$

b) $\vec{a}-\vec{b}$

c) $3\vec{a}-2\vec{b}$

5.18 Finn enhetsvektoren i retning $[2,3,6]$.

5.19 Finn en vektor med lengde 15 i samme retning som $[3,4,12]$.

5.20 Avgjør om vektorene er parallelle.

a) $[1,-2,3]$ og $[-2,4,-6]$

b) $[2,4,6]$ og $[1,2,4]$

5.21 Finn t slik at $[t,-6,9]$ er parallell med $[2,4,-6]$.

5.22 Ligger $A(0,1,2)$, $B(2,5,8)$ og $C(5,11,17)$ på en rett linje?

5.23 Finn punktet P på AB med $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ når $A(2,0,4)$ og $B(10,8,0)$.

5.24 Finn y og z slik at $\vec{a} = [2,y,3]$ og $\vec{b} = [4,10,z]$ er parallelle.

5.25 Hva blir utskriften?

Python
```
import numpy as np
a = np.array([1, 2, 2])
b = np.array([2, 0, -1])
print(a + b, 2 * a - b)
```

5.26 Hva blir utskriften?

Python
```
import numpy as np
print(np.linalg.norm(np.array([2, 3, 6])))
```

5.27 Forklar hvorfor $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

5.28 Vis at midtpunktet M mellom A og B har stedsvektor $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

5.29 Tre hjørner i en trekant er $A(0,0,0)$, $B(6,0,0)$ og $C(0,6,3)$. Finn tyngdepunktet $\frac{A+B+C}{3}$.

5.2.1 Skalarproduktet

EKSEMPEL *Vinkelen mellom to vektorer*
Finn vinkelen mellom $\vec{a} = [1,2,2]$ og $\vec{b} = [2,-1,2]$.

Løsning
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2-2+4 = 4$, $|\vec{a}| = 3$ og $|\vec{b}| = 3$. Da er $\cos\theta = \frac{4}{9}$, så

$$\theta = \arccos\frac{4}{9} \approx 63{,}6°$$

∎

EKSEMPEL *Vinkelrette vektorer*
Står $\vec{a} = [1,2,3]$ og $\vec{b} = [3,0,-1]$ vinkelrett på hverandre? Finn t slik at $[t,2,-1]$ og $[3,t,4]$ står vinkelrett.

Løsning
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3+0-3 = 0$, så de står vinkelrett.

For den andre: $[t,2,-1]\cdot[3,t,4] = 3t+2t-4 = 5t-4 = 0$ gir $t = \frac{4}{5}$. ∎

EKSEMPEL *Projeksjon av a på b*
Finn projeksjonen av $\vec{a} = [3,4,0]$ på $\vec{b} = [1,2,2]$, og lengden av den.

Løsning
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3+8+0 = 11$ og $|\vec{b}|^2 = 9$. Projeksjonen er $\frac{11}{9}[1,2,2] = \left[\frac{11}{9},\frac{22}{9},\frac{22}{9}\right]$, med lengde $\frac{11}{3} \approx 3{,}67$. ∎

EKSEMPEL *Arbeid*
En kraft $\vec{F} = [2,1,3]$ N flytter en gjenstand langs $\vec{s} = [4,0,2]$ m. Hvor stort er arbeidet?

Løsning
$W = 2\cdot 4+1\cdot 0+3\cdot 2 = 14$ J. ∎

5.30 Regn ut skalarproduktene.

a) $[1,2,3]\cdot[2,0,-1]$

b) $[2,-1,4]\cdot[3,2,1]$

c) $[1,1,1]\cdot[1,1,1]$

5.31 Avgjør om vektorene står vinkelrett på hverandre.

a) $[1,2,3]$ og $[3,0,-1]$

b) $[2,2,1]$ og $[1,-1,0]$

c) $[1,1,1]$ og $[1,2,3]$

5.32 Finn t slik at $[t,2,-1]$ og $[3,t,4]$ står vinkelrett.

5.33 Finn x slik at $[x,4,2]$ og $[3,-1,x]$ står vinkelrett.

5.34 Finn vinkelen mellom $[1,0,0]$ og $[1,1,0]$, og mellom $[1,1,0]$ og $[0,1,1]$.

5.35 Finn vinkelen mellom $[1,2,2]$ og $[2,-1,2]$.

5.36 Finn vinklene i trekanten $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$.

5.37 Finn projeksjonen av $[2,3,6]$ på $[1,2,2]$, og lengden av den.

5.38 Finn projeksjonen av $[4,3,0]$ på x-aksen, altså på $[1,0,0]$.

5.39 En kraft $[5,-2,1]$ N flytter en gjenstand langs $[3,4,2]$ m. Finn arbeidet.

5.40 Vis at $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$.

5.41 Hva må gjelde for at $\vec{a}+\vec{b}$ og $\vec{a}-\vec{b}$ skal stå vinkelrett på hverandre?

5.42 Hva blir utskriften?

Python

```
import numpy as np
a = np.array([1, 2, 3])
b = np.array([2, 0, -1])
print(a @ b)
```

5.43 Hva blir utskriften?

Python

```
import numpy as np
a = np.array([1, 1, 0])
b = np.array([0, 1, 1])
c = a @ b / (np.linalg.norm(a) *
np.linalg.norm(b))
print(round(np.degrees(np.arccos(c))))
```

5.44 Forklar hvorfor skalarproduktet $\vec{a}\cdot\vec{b}$ er negativt når vinkelen mellom vektorene er større enn 90°.

5.2.2 Vektorproduktet

EKSEMPEL *Regne ut et vektorprodukt*

Regn ut $[1,2,3]\times[4,5,6]$, og kontroller at resultatet står vinkelrett på begge vektorene.

Løsning

$[1,2,3]\times[4,5,6] = [2\cdot6-3\cdot5, 3\cdot4-1\cdot6, 1\cdot5-2\cdot4] = [-3,6,-3]$

Kontroll: $[1,2,3]\cdot[-3,6,-3] = -3+12-9 = 0$ og $[4,5,6]\cdot[-3,6,-3] = -12+30-18 = 0$.

■

EKSEMPEL *En vektor vinkelrett på to andre*

Finn en vektor som står vinkelrett på både $\vec{a} = [2,1,-1]$ og $\vec{b} = [1,3,2]$.

Løsning

$\vec{a}\times\vec{b} = [1\cdot2-(-1)\cdot3, (-1)\cdot1-2\cdot2, 2\cdot3-1\cdot1] = [5,-5,5]$

Alle vektorer parallelle med denne fungerer, for eksempel $[1,-1,1]$. Kontroll: $[2,1,-1]\cdot[1,-1,1] = 2-1-1 = 0$ ✓.

■

EKSEMPEL *Parallelle vektorer*

Avgjør om $[2,4,6]$ og $[1,2,3]$ er parallelle ved hjelp av vektorproduktet.

Løsning

$[2,4,6]\times[1,2,3] = [4\cdot3-6\cdot2, 6\cdot1-2\cdot3, 2\cdot2-4\cdot1] = [0,0,0]$. Ja, de er parallelle. (Faktisk er $[2,4,6] = 2[1,2,3]$.)

■

EKSEMPEL *Rekkefølgen betyr noe*

Regn ut $[1,0,0]\times[0,1,0]$ og $[0,1,0]\times[1,0,0]$.

Løsning

$[1,0,0]\times[0,1,0] = [0-0, 0-0, 1-0] = [0,0,1]$, mens $[0,1,0]\times[1,0,0] = [0,0,-1]$. Resultatene har motsatt fortegn, som regelen sier.

■

EKSEMPEL *Lengden av vektorproduktet*

Regn ut lengden av $[1,2,2]\times[2,-1,2]$, og sammenlign med $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ der $\cos\theta = \frac{4}{9}$.

Løsning

$[1,2,2]\times[2,-1,2] = [4+2, 4-2, -1-4] = [6,2,-5]$ med lengde $\sqrt{36+4+25} = \sqrt{65} \approx 8{,}06$.

Med $\cos\theta = \frac{4}{9}$ er $\sin\theta = \sqrt{1-\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt{65}}{9}$, så $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = 3\cdot3\cdot\frac{\sqrt{65}}{9} = \sqrt{65}$ ✓.

■

5.45 Regn ut vektorproduktene.

a) $[1,0,2]\times[3,1,0]$

b) $[2,-1,3]\times[1,4,-2]$

c) $[1,0,0]\times[0,0,1]$

5.46 Vis at resultatet i oppgave b) står vinkelrett på $[2,-1,3]$.

5.47 Regn ut $\vec{i}\times\vec{j}$, $\vec{j}\times\vec{k}$ og $\vec{k}\times\vec{i}$, der $\vec{i}=[1,0,0]$, $\vec{j}=[0,1,0]$ og $\vec{k}=[0,0,1]$.

5.48 Finn en vektor som står vinkelrett på både $[1,1,0]$ og $[0,1,1]$.

5.49 Finn enhetsvektoren som står vinkelrett på $[1,2,2]$ og $[2,-1,2]$.

5.50 Avgjør om $[1,-2,3]$ og $[-2,4,-6]$ er parallelle ved å regne ut vektorproduktet.

5.51 To vektorer har lengder 2 og 3, og vinkelen mellom dem er $30°$. Hvor lang er vektorproduktet?

5.52 To vektorer har lengder 3 og 4, og vektorproduktet har lengde $6\sqrt{3}$. Hva kan vinkelen mellom dem være?

5.53 La $\vec{a}=[1,2,3]$, $\vec{b}=[0,1,0]$ og $\vec{c}=[1,0,1]$. Kontroller at $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

5.54 Vis at $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ med koordinater.

5.55 Forklar hvorfor $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

5.56 Hva blir utskriften?

Python

```
import numpy as np
print(np.cross([0, 0, 1], [1, 0, 0]))
```

5.57 Hva blir utskriften?

Python

```
import numpy as np
a = np.array([1, 2, 3])
print(np.cross(a, a))
```

5.58 Skriv en funksjon `kryss(a, b)` som regner ut vektorproduktet av to lister med tre tall, og bruk den på $[1,2,3]$ og $[4,5,6]$.

5.3.1 Areal og volum med vektorer

EKSEMPEL *Arealet av en trekant i rommet*

Finn arealet av trekanten med hjørnene $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ og $C(0,0,3)$.

Løsning

$\overrightarrow{AB}=[-1,2,0]$ og $\overrightarrow{AC}=[-1,0,3]$. Vektorproduktet er

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=[2\cdot3-0\cdot0,0\cdot(-1)-(-1)\cdot3,(-1)\cdot0-2\cdot(-1)]=[6,3,2]$$

med lengde $\sqrt{36+9+4}=7$. Arealet er $\dfrac{7}{2}=3{,}5$. ∎

EKSEMPEL *Takflaten*

Et tak er en trekant med hjørnene $A(1,2,3)$, $B(2,4,5)$ og $C(3,3,1)$ (koordinater i meter). Finn arealet.

Løsning

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=[2\cdot(-2)-2\cdot1,2\cdot2-1\cdot(-2),1\cdot1-2\cdot2]=[-6,6,-3]$ med lengde $\sqrt{36+36+9}=9$. Arealet er $\dfrac{9}{2}=4{,}5$ m². ∎

EKSEMPEL *Volum av parallellepiped*

Finn volumet av parallellepipedet utspent av $\vec{a}=[1,2,0]$, $\vec{b}=[0,1,3]$ og $\vec{c}=[2,0,1]$.

Løsning

$\vec{a}\times\vec{b}=[2\cdot3-0\cdot1,0\cdot0-1\cdot3,1\cdot1-2\cdot0]=[6,-3,1]$. Da er $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=12+0+1=13$, så volumet er 13. ∎

EKSEMPEL *Volum av pyramide*

Finn volumet av pyramiden med hjørnene $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ og $C(0,0,3)$. Finn også høyden fra O ned på trekanten ABC.

Løsning

$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=[1,0,0]\times[0,2,0]=[0,0,2]$, og $[0,0,2]\cdot[0,0,3]=6$. Så $V=\dfrac{6}{6}=1$.

Trekanten ABC har areal 3,5 (fra første eksempel). Fra $V=\dfrac{1}{3}\cdot3{,}5\cdot h=1$ får vi $h=\dfrac{3}{3{,}5}=\dfrac{6}{7}\approx0{,}857$. ∎

EKSEMPEL *Samme plan?*

Ligger punktene $A(1,0,1)$, $B(2,1,3)$, $C(0,2,1)$ og $D(1,3,3)$ i samme plan?

Løsning

$\overrightarrow{AB}=[1,1,2]$, $\overrightarrow{AC}=[-1,2,0]$ og $\overrightarrow{AD}=[0,3,2]$. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=[1\cdot0-2\cdot2,2\cdot(-1)-1\cdot0,1\cdot2-1\cdot(-1)]=[-4,-2,3]$, og $[-4,-2,3]\cdot[0,3,2]=0-6+6=0$. Ja, punktene ligger i samme plan. ∎

5.59 Finn arealet av parallellogrammet utspent av

a) $[3,0,0]$ og $[0,4,0]$

b) $[1,2,3]$ og $[2,0,1]$

5.60 Finn arealet av trekanten med hjørnene $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ og $C(0,0,3)$.

5.61 Finn arealet av trekanten $A(0,0,0)$, $B(2,2,1)$, $C(2,-1,-2)$.

5.62 Hjørnene i en trekant er $A(1,2,3)$, $B(2,4,5)$ og $C(3,3,1)$. Finn arealet og lengden av høyden fra C ned på AB.

5.63 Finn volumet av parallellepipedet utspent av $[1,0,0]$, $[1,2,0]$ og $[1,1,3]$.

5.64 Finn volumet av parallellepipedet utspent av $[1,2,0]$, $[0,1,3]$ og $[2,0,1]$.

5.65 Finn volumet av pyramiden med hjørnene $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(0,3,0)$ og $D(0,0,4)$. Kontroller med $V = \frac{1}{3} \cdot grunnflate \cdot høyde$.

5.66 Finn volumet av pyramiden med hjørnene $A(1,1,1)$, $B(3,1,1)$, $C(1,4,1)$ og $D(1,1,6)$.

5.67 Avgjør om punktene ligger i samme plan.

a) $A(0,0,0)$, $B(1,2,3)$, $C(2,1,0)$, $D(3,3,3)$

b) $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$, $D(1,1,1)$

5.68 Finn z slik at $A(0,0,0)$, $B(1,2,3)$, $C(2,1,0)$ og $D(1,1,z)$ ligger i samme plan.

5.69 Finn høyden fra O ned på trekanten ABC i pyramiden $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$.

5.70 Hva blir utskriften?

Python

```
import numpy as np
a = np.array([2, 0, 0])
b = np.array([1, 3, 0])
print(np.linalg.norm(np.cross(a, b)))
```

Hva er det arealet av?

5.71 Skriv et program som regner ut arealet av trekanten med hjørnene $A(1,2,3)$, $B(2,4,5)$ og $C(3,3,1)$.

5.72 Forklar hvorfor skalartrippelproduktet kan være negativt, men volumet ikke kan.

5.4.1 Linjer i rommet

EKSEMPEL *Punkt på linja*

Linja har parameterframstillingen $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = 3 + 4t$. Finn punktet for $t = 2$.

Løsning

$x = 1 + 4 = 5$, $y = 2 - 2 = 0$ og $z = 3 + 8 = 11$. Punktet er $(5, 0, 11)$. ∎

EKSEMPEL *Linje gjennom to punkter*

Finn en parameterframstilling for linja gjennom $P(1,0,2)$ og $Q(3,4,-2)$. Ligger $R(5,8,-6)$ på linja?

Løsning

$\overrightarrow{PQ} = [2,4,-4]$, som er parallell med $[1,2,-2]$. Linja er $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 2 - 2t$.

For $R(5,8,-6)$: $x = 5$ gir $t = 4$. Da er $y = 8$ ✓ og $z = 2 - 8 = -6$ ✓. Ja, R ligger på linja. ∎

EKSEMPEL *Skjæringspunkt*

Linjene er l_1: $x = 1 + t$, $y = 2 + t$, $z = 3 + 2t$ og l_2: $x = 1 + 2s$, $y = 5 - s$, $z = 4 + 3s$. Skjærer de hverandre?

Løsning

$1 + t = 1 + 2s$ gir $t = 2s$. Fra $2 + t = 5 - s$ får vi $2 + 2s = 5 - s$, altså $s = 1$ og $t = 2$. Kontroll i den tredje: $3 + 2t = 7$ og $4 + 3s = 7$ ✓. Linjene skjærer hverandre i punktet $(3,4,7)$. ∎

EKSEMPEL *Vindskjeve linjer*

Linja l_1 er som over. Linja l_3 har $x = 1 + 2s$, $y = 5 - s$, $z = 5 + 3s$. Skjærer de?

Løsning

Som før gir de to første likningene $s = 1$ og $t = 2$. Men tredje koordinat: $3 + 2t = 7$ mens $5 + 3s = 8$. De er ikke like, så likningssystemet har ingen løsning. Retningsvektorene $[1,1,2]$ og $[2,-1,3]$ er ikke parallelle, så linjene er vindskjeve. ∎

EKSEMPEL *Parallelle linjer*

Er linjene med retningsvektorer $[1,2,3]$ og $[2,4,6]$ gjennom punktene $(0,0,0)$ og $(1,0,0)$ sammenfallende eller parallelle?

Løsning

$[2,4,6] = 2[1,2,3]$, så linjene er parallelle. Punktet $(1,0,0)$ ligger på den første linja hvis $t = 1$, $2t = 0$, $3t = 0$ for samme t, og det går ikke. Linjene er parallelle og ikke sammenfallende. ∎

5.73 Skriv en parameterframstilling for linja gjennom $A(1,2,3)$ med retningsvektor $[2,-1,4]$, og finn punktet for $t = 2$ og $t = -1$.

5.74 Finn en parameterframstilling for linja gjennom $P(2,0,-1)$ og $Q(5,3,2)$.

5.75 Linja er $x = 3 - 2t$, $y = 1 + t$, $z = 4t$. Avgjør om punktene ligger på linja.

a) $(5,0,-4)$

b) $(1,2,3)$

5.76 Hvor skjærer linja $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = 3 - 3t$ koordinatplanene?

5.77 Avgjør om linjene skjærer hverandre, er parallelle eller vindskjeve.

l_1: $x = 1 + t$, $y = 2 + t$, $z = 3 + 2t$ l_2: $x = 1 + 2s$, $y = 5 - s$, $z = 4 + 3s$

5.78 Avgjør om linjene skjærer hverandre, er parallelle eller vindskjeve.

l_1: $x = t$, $y = 1 + t$, $z = 2t$ l_2: $x = 2 + s$, $y = 3 + s$, $z = 4 + 2s$

5.79 Avgjør om linjene skjærer hverandre.

l_1: $x = t$, $y = 2t$, $z = 3t$ l_2: $x = 1 + s$, $y = s$, $z = 1$

5.80 Finn a slik at linjene $x = t$, $y = 1 + t$, $z = 2t$ og $x = 1 + s$, $y = 2s$, $z = a$ skjærer hverandre.

5.81 En drone flyr langs $x = 10 + 4t$, $y = 5 - 2t$, $z = 20 - 3t$ (t i sekunder, koordinater i meter). Hvor er den etter 5 sekunder, og når lander den ($z = 0$)?

5.82 To droner flyr langs $\vec{r}_1(t) = [t, 2t, 3]$ og $\vec{r}_2(t) = [4, t, 3]$ (t i sekunder). Krysser banene hverandre, og kolliderer dronene?

5.83 Hva blir utskriften?

Python

```
def punkt(t):
    return (2 + 3*t, -1 + t, 4 - 2*t)

print(punkt(2))
```

5.84 Skriv et program som sjekker om punktet $(5, 0, 2)$ ligger på linja $x = 2 + 3t$, $y = -1 + t$, $z = 4 - 2t$.

5.85 Forklar hvorfor to linjer i rommet kan være vindskjeve, men ikke i planet.

5.4.2 Kurver, fart og akselerasjon

EKSEMPEL *Sirkelen*

Hvilken kurve beskriver $\vec{r}(t) = [3\cos t, 3\sin t]$ for $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$?

Løsning

$x^2 + y^2 = 9\cos^2 t + 9\sin^2 t = 9$. Punktene ligger på sirkelen med sentrum i origo og radius 3. Når t går fra 0 til 2π, går punktet én runde mot klokka, fra $(3, 0)$.

■

EKSEMPEL *En parabelbane*

En partikkel beveger seg langs $\vec{r}(t) = [2t, t^2 - 4t]$. Finn $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$, og farten ved $t = 1$ og $t = 2$.

Løsning

$\vec{v}(t) = [2, 2t - 4]$ og $\vec{a}(t) = [0, 2]$.

Farten er $|\vec{v}(t)| = \sqrt{4 + (2t - 4)^2}$. For $t = 1$ er $\vec{v} = [2, -2]$ og farten er $\sqrt{8} \approx 2{,}83$. For $t = 2$ er $\vec{v} = [2, 0]$ og farten er 2. Siden $4 + (2t - 4)^2$ er minst når $2t - 4 = 0$, er farten lavest ved $t = 2$.

■

EKSEMPEL *Sirkelbevegelse*

Finn $\vec{v}$, $\vec{a}$ og farten for $\vec{r}(t) = [3\cos t, 3\sin t]$. Hva er det spesielle med akselerasjonen?

Løsning

$\vec{v}(t) = [-3\sin t, 3\cos t]$ med fart $\sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t} = 3$. Akselerasjonen er $\vec{a}(t) = [-3\cos t, -3\sin t] = -\vec{r}(t)$, med lengde 3.

Farten er konstant, men akselerasjonen er ikke $\vec{0}$: Den peker inn mot sentrum. Fartens retning endrer seg hele tiden, og det krever en akselerasjon. Den kalles sentripetalakselerasjonen.

■

EKSEMPEL *Skrulinje i rommet*

Finn fart og akselerasjon for $\vec{r}(t) = [\cos t, \sin t, t]$.

Løsning

$\vec{v}(t) = [-\sin t, \cos t, 1]$ med fart $\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$, og $\vec{a}(t) = [-\cos t, -\sin t, 0]$. Kurven er en skrulinje (heliks) som går rundt i en sirkel mens den stiger jevnt, som en vindeltrapp.

■

EKSEMPEL *Kastet*

En ball kastes med startfart 20 m/s i vinkel 30°. Finn flytiden, rekkevidden og høyeste punkt.

Løsning

Her er $x(t) = 20\cos 30° \cdot t \approx 17{,}32\ t$ og $y(t) = 20\sin 30° \cdot t - 4{,}905\ t^2 = 10t - 4{,}905\ t^2$.

$y(t) = 0$ gir $t(10 - 4{,}905\ t) = 0$, så flytiden er $t = \dfrac{10}{4{,}905} \approx 2{,}04$ s. Rekkevidden er $x(2{,}04) \approx 17{,}32 \cdot 2{,}04 \approx 35{,}3$ m.

$y'(t) = 10 - 9{,}81\ t = 0$ gir $t \approx 1{,}02$ s, og høyden er $y(1{,}02) \approx 5{,}10$ m.

■

5.86 En partikkel følger $\vec{r}(t) = [t^2, 2t]$. Finn $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ og farten ved $t = 3$.

5.87 En partikkel følger $\vec{r}(t) = [3t, t^2 - 6t]$. Når er farten lavest, og hva er farten da?

5.88 En partikkel følger $\vec{r}(t) = [5\cos t, 5\sin t]$. Finn $\vec{v}$, $\vec{a}$, farten og lengden av akselerasjonen.

5.89 En partikkel følger $\vec{r}(t) = [2\cos 3t, 2\sin 3t]$. Finn farten og lengden av akselerasjonen. Hvor lang tid tar en runde?

5.90 En ball kastes med startfart 25 m/s i vinkel 45°. Finn flytid, rekkevidde og høyeste punkt.

5.91 En ball følger $\vec{r}(t) = [10t, 12t - 5t^2]$. Finn toppunktet, landingspunktet og farten i toppunktet.

5.92 Finn fart og akselerasjon for skrulinja $\vec{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t, 3t]$.

5.93 Finn tangenten til kurven $\vec{r}(t) = [t, t^2]$ i punktet der $t = 1$.

5.94 En drone følger $\vec{r}(t) = [1 + 2t, 3 - t, 4t]$. Finn fart, akselerasjon og farten.

5.95 En ball slippes fra et tårn 45 m over bakken: $\vec{r}(t) = [0, 45 - 4{,}905\ t^2]$. Når treffer den bakken, og hvor stor er farten da?

5.96 Finn rekkevidden for et kast med startfart 20 m/s og vinkel 45°, og forklar hvorfor 45° gir størst rekkevidde.

5.97 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import sqrt
v = lambda t: (2*t, 2)
fx, fy = v(3)
print(round(sqrt(fx**2 + fy**2), 2))
```

5.98 Hva blir utskriften?

Python

```
t = 2
print(15*t, 20*t - 5*t**2)
```

Hva er dette punktet?

5.99 Forklar hvorfor fartsvektoren er tangent til banen.

5.100 Vis at en partikkel med $\vec{r}(t) = [x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct]$ har konstant fart og null akselerasjon.

5.5.1 Likning og parameterframstilling for plan

EKSEMPEL *Plan gjennom et punkt med normalvektor*

Finn likningen for planet gjennom $P(1,2,3)$ med normalvektor $\vec{n} = [2,-1,4]$. Ligger $Q(3,2,2)$ i planet?

Løsning

$2(x-1) - (y-2) + 4(z-3) = 0$, som gir $2x - y + 4z - 12 = 0$.

For $Q(3,2,2)$: $2\cdot 3 - 2 + 4\cdot 2 = 6 - 2 + 8 = 12$ ✓. Ja, Q ligger i planet. ∎

EKSEMPEL *Plan gjennom tre punkter*

Finn likningen for planet gjennom $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ og $C(0,0,3)$.

Løsning

$\overrightarrow{AB} = [-1,2,0]$ og $\overrightarrow{AC} = [-1,0,3]$ gir $\vec{n} = [6,3,2]$. Med $A(1,0,0)$:

$$6(x-1) + 3y + 2z = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x + 3y + 2z = 6$$

Kontroll: B: $0 + 6 + 0 = 6$ ✓. C: $0 + 0 + 6 = 6$ ✓. Delt på 6 er det $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$, der 1, 2 og 3 er der planet skjærer aksene. ∎

EKSEMPEL *Plan som inneholder en retning*

Finn likningen for planet gjennom $A(1,2,3)$, $B(2,3,5)$ og $C(0,1,-1)$.

Løsning

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [1\cdot(-4) - 2\cdot(-1), 2\cdot(-1) - 1\cdot(-4), 1\cdot(-1) - 1\cdot(-1)] = [-2,2,0]$. Med A: $-2(x-1) + 2(y-2) + 0\cdot(z-3) = 0$, altså $-2x + 2y + 2 = 0$ eller $x - y + 1 = 0$. Likningen har ikke z: Planet er parallelt med z-aksen. ∎

EKSEMPEL *Fra parameterframstilling til likning*

Planet er $\vec{r}(s,t) = [1,0,2] + s[1,2,0] + t[0,1,3]$. Finn likningen for planet.

Løsning

$\vec{n} = [1,2,0] \times [0,1,3] = [6,-3,1]$. Planet går gjennom $(1,0,2)$, så $6(x-1) - 3y + (z-2) = 0$, altså $6x - 3y + z = 8$. ∎

EKSEMPEL *Fra likning til parameterframstilling*

Finn en parameterframstilling for planet $x + y + z = 6$.

Løsning

Punktet $(2,2,2)$ ligger i planet. Vektorene $\vec{u} = [1,-1,0]$ og $\vec{v} = [0,1,-1]$ gir $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$ og $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$, og er ikke parallelle. Altså

$$\vec{r}(s,t) = [2,2,2] + s[1,-1,0] + t[0,1,-1]$$

∎

5.101 Finn likningen for planet gjennom $P(2,-1,3)$ med normalvektor $[1,2,-2]$.

5.102 Hva er normalvektoren til planene

a) $3x - y + 5z = 8$

b) $x + 2z = 4$

c) $z = 7$

5.103 Ligger punktene i planet $2x - y + 4z = 12$?

a) $(1,2,3)$

b) $(0,4,4)$

c) $(5,0,1)$

5.104 Finn likningen for planet gjennom $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ og $C(0,0,3)$.

5.105 Finn likningen for planet gjennom $A(1,1,0)$, $B(2,3,1)$ og $C(0,2,2)$.

5.106 Finn likningen for planet gjennom $A(1,2,3)$, $B(2,3,5)$ og $C(0,1,-1)$.

5.107 Finn likningen for planet med parameterframstilling $\vec{r}(s,t) = [1,0,2] + s[1,2,0] + t[0,1,3]$.

5.108 Finn en parameterframstilling for planet $x + y + z = 6$.

5.109 Finn en parameterframstilling for planet gjennom $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ og $C(0,0,3)$.

5.110 Finn likningen for planet som består av alle punkter som er like langt fra $A(1,2,3)$ og $B(3,0,7)$.

5.111 Finn punktene der planet $2x + 3y + 6z = 12$ skjærer aksene.

5.112 Hva blir utskriften?

Python

```
import numpy as np
A = np.array([1, 0, 0])
B = np.array([0, 2, 0])
C = np.array([0, 0, 3])
n = np.cross(B - A, C - A)
print(n @ A)
```

5.113 Hvilke av planene er parallelle? $x + 2y - z = 3$, $2x + 4y - 2z = 7$, $x - y + z = 0$.

5.114 Forklar hvorfor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ er en normalvektor til planet gjennom A, B og C.

5.115 Hva skjer med planet $ax + by + cz = d$ hvis vi ganger hele likningen med 2?

5.5.2 Skjæring mellom linjer og plan

EKSEMPEL *Skjæringspunktet*

Finn skjæringspunktet mellom linja $\vec{r}(t) = t\,[1, 2, 3]$ og planet $x + y + z = 6$.

Løsning

$t + 2t + 3t = 6$ gir $t = 1$. Skjæringspunktet er $(1, 2, 3)$. ∎

EKSEMPEL *Linje parallell med planet*

Linja er $\vec{r}(t) = [1, 0, 0] + t\,[0, 1, -1]$ og planet er $x + y + z = 3$. Hva er forholdet mellom dem?

Løsning

$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 + 1 - 1 = 0$, så linja er parallell med planet. Setter vi inn startpunktet $(1, 0, 0)$, får vi $1 \neq 3$, så linja ligger ikke i planet. Det er ingen skjæring. ∎

EKSEMPEL *Linje i planet*

Linja er $\vec{r}(t) = [2, 2, 2] + t\,[1, -1, 0]$ og planet er $x + y + z = 6$. Hva er forholdet?

Løsning

$(2 + t) + (2 - t) + 2 = 6$ gir $6 = 6$ for alle t. Linja ligger i planet. ∎

EKSEMPEL *To plan som skjærer*

Finn skjæringslinja mellom $x + y + z = 6$ og $x - y + 2z = 3$.

Løsning

$\vec{v} = [1, 1, 1] \times [1, -1, 2] = [1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2, 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1] = [3, -1, -2]$.

Med $z = 0$ er $x + y = 6$ og $x - y = 3$, så $x = 4{,}5$ og $y = 1{,}5$. Punktet er $(4{,}5;\ 1{,}5;\ 0)$. Skjæringslinja er

$$x = 4{,}5 + 3t, \qquad y = 1{,}5 - t, \qquad z = -2t$$

Kontroll i det første planet: $4{,}5 + 3t + 1{,}5 - t - 2t = 6$ ✓. ∎

5.116 Finn skjæringspunktet mellom linja $\vec{r}(t) = [1, 0, 2] + t[2, 1, -1]$ og planet $x + 2y + z = 9$.

5.117 Finn skjæringspunktet mellom linja $\vec{r}(t) = [0, 1, 2] + t[1, 2, -1]$ og planet $2x + y + 3z = 13$.

5.118 Hvor skjærer linja $\vec{r}(t) = [1, 2, 3] + t[1, 0, -1]$ koordinatplanene?

5.119 Avgjør om linja er parallell med planet, ligger i det eller skjærer det.

a) $\vec{r}(t) = [1, 0, 0] + t[0, 1, -1]$, planet $x + y + z = 3$

b) $\vec{r}(t) = [2, 2, 2] + t[1, -1, 0]$, planet $x + y + z = 6$

c) $\vec{r}(t) = [0, 0, 0] + t[1, 1, 1]$, planet $x + y + z = 6$

5.120 Finn a slik at linja $\vec{r}(t) = [1, 2, 3] + t[2, 1, a]$ er parallell med planet $x + y + z = 10$.

5.121 Finn skjæringslinja mellom planene $x + y + z = 6$ og $x - y + 2z = 3$.

5.122 Finn skjæringslinja mellom planene $x + 2y - z = 4$ og $2x - y + z = 5$.

5.123 Avgjør om planene er parallelle eller skjærer hverandre.

a) $x + 2y - z = 3$ og $2x + 4y - 2z = 8$

b) $x + y + z = 1$ og $x - y + z = 1$

5.124 Finn punktet der de tre planene $x = 1$, $y = 2$ og $z = 3$ møtes, og punktet der $x + y + z = 6$, $x - y = -1$ og $z = 3$ møtes.

5.125 Hva blir utskriften?

Python

```
import numpy as np
A = np.array([[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]])
b = np.array([4, -2, 7])
print(np.linalg.solve(A, b))
```

5.126 En lysstråle følger $\vec{r}(t) = [0, 0, 5] + t[1, 1, -1]$. Hvor treffer den planet $z = 0$?

5.127 Forklar hvorfor to plan som ikke er parallelle alltid skjærer hverandre langs en linje.

5.128 Vis at skjæringslinja mellom to plan står vinkelrett på begge normalvektorene.

5.6.1 Vinkler mellom linjer og plan

EKSEMPEL *Vinkel mellom to linjer*

Linjene har retningsvektorene $[1,2,2]$ og $[2,-1,2]$. Finn vinkelen mellom dem.

Løsning

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2-2+4 = 4$, $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 3$. Da er $\cos\theta = \frac{4}{9}$, så $\theta \approx 63{,}6°$. ∎

EKSEMPEL *Vinkel mellom linje og plan*

Finn vinkelen mellom linja med retningsvektor $[1,2,3]$ og planet $x+y+z=6$.

Løsning

$\vec{n}\cdot\vec{v} = 6$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$ og $|\vec{v}| = \sqrt{14}$. Da er $\sin\varphi = \frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{14}} \approx 0{,}926$, så $\varphi \approx 67{,}8°$. ∎

EKSEMPEL *Vinkel mellom to plan*

Finn vinkelen mellom planene $x+y+z=6$ og $x-y+2z=3$.

Løsning

$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = 1-1+2 = 2$, $|\vec{n}_1| = \sqrt{3}$ og $|\vec{n}_2| = \sqrt{6}$. Da er $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{18}} \approx 0{,}471$, så $\theta \approx 61{,}9°$. ∎

EKSEMPEL *Romdiagonalen i en kube*

Finn vinkelen mellom romdiagonalen $[1,1,1]$ og grunnflaten (planet $z=0$) i en kube.

Løsning

$\sin\varphi = \frac{|[0,0,1]\cdot[1,1,1]|}{1\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$, så $\varphi \approx 35{,}3°$. ∎

5.129 Finn vinkelen mellom linjene med retningsvektorene

a) $[1,0,0]$ og $[1,1,0]$

b) $[1,1,0]$ og $[0,1,1]$

c) $[1,2,2]$ og $[2,-1,2]$

5.130 Finn vinkelen mellom linjene med retningsvektorene $[1,-2,3]$ og $[-2,4,-6]$.

5.131 Finn vinkelen mellom linja med retningsvektor $[1,2,3]$ og planene

a) $x+y+z=6$

b) $z=0$

5.132 Hva er vinkelen mellom linja med retningsvektor $[1,1,0]$ og planet $x-y=0$? Hva er vinkelen mellom linja med retningsvektor $[1,1,0]$ og planet $x+y=0$?

5.133 Finn vinkelen mellom planene

a) $x+y+z=6$ og $x-y+2z=3$

b) $z=0$ og $x+y+z=0$

c) $x+2y+2z=5$ og $2x+3y+6z=1$

5.134 Finn vinkelen mellom romdiagonalen $[1,1,1]$ i en kube og en sideflate i kuben.

5.135 Et skråtak er planet $x+z=4$. Finn vinkelen mellom taket og horisontalplanet $z=0$.

5.136 Finn a slik at linjene med retningsvektorene $[1,2,a]$ og $[2,1,2]$ står vinkelrett på hverandre.

5.137 Finn a slik at linja med retningsvektor $[1,2,a]$ er parallell med planet $x+y+z=0$.

5.138 En lysstråle følger retningen $[1,0,-1]$ og treffer et speil i planet $z=0$. Finn vinkelen mellom strålen og speilet.

5.139 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import acos, degrees, sqrt
print(round(degrees(acos(1 / sqrt(2)))))
```

5.140 Skriv et program som regner ut vinkelen i grader mellom linja med retningsvektor $[1,2,3]$ og planet $x+y+z=6$.

5.141 Forklar hvorfor vi bruker absoluttverdi i formlene for vinkel mellom linjer og mellom plan.

5.7.1 Avstander

EKSEMPEL *Avstand fra punkt til plan*

Finn avstanden fra $P(1,2,3)$ til planet $2x-y+2z-4=0$.

Løsning

$$\frac{|2\cdot 1-2+2\cdot 3-4|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|2-2+6-4|}{3} = \frac{2}{3}$$

∎

EKSEMPEL *Nærmeste punkt i planet*

Finn det punktet i planet $2x-y+2z=4$ som er nærmest $P(1,2,3)$.

Løsning

Linja er $\vec{r}(t) = [1+2t, 2-t, 3+2t]$. Innsatt i planet: $2(1+2t)-(2-t)+2(3+2t) = 6+9t = 4$, så $t = -\frac{2}{9}$. Punktet er $\left(\frac{5}{9}, \frac{20}{9}, \frac{23}{9}\right)$. Avstanden er $|t|\cdot|\vec{n}| = \frac{2}{9}\cdot 3 = \frac{2}{3}$, som stemmer. ∎

EKSEMPEL *Parallelle plan*

Finn avstanden mellom planene $x+2y+2z=3$ og $x+2y+2z=12$.

Løsning
Punktet $(3,0,0)$ ligger i det første planet. Avstanden til $x+2y+2z-12=0$ er $\dfrac{|3-12|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{9}{3} = 3$. ∎

EKSEMPEL *Avstand fra punkt til linje*
Finn avstanden fra $P(3,0,0)$ til linja gjennom origo med retningsvektor $\vec{v} = [1,2,2]$.

Løsning
$\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = [3,0,0] \times [1,2,2] = [0\cdot 2 - 0\cdot 2, 0\cdot 1 - 3\cdot 2, 3\cdot 2 - 0\cdot 1] = [0,-6,6]$ med lengde $6\sqrt{2}$.
Avstanden er $\dfrac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$. ∎

EKSEMPEL *To vindskjeve linjer*
Linjene er $l_1\colon \vec{r}(t) = t\,[1,1,0]$ og $l_2\colon \vec{r}(s) = [0,0,3] + s\,[1,-1,0]$. Finn avstanden mellom dem.

Løsning
$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = [1,1,0] \times [1,-1,0] = [0,0,-2]$ med lengde 2. $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot [0,0,-2] = -6$. Avstanden er $\dfrac{|-6|}{2} = 3$.
(Linjene ligger i to vannrette plan, i høydene 0 og 3.) ∎

5.142 Finn avstanden fra punktet til planet.

a) $P(0,0,0)$ og $x+2y+2z=9$

b) $P(1,1,1)$ og $x+y+z=0$

c) $P(2,1,-1)$ og $3x+4y+12z-5=0$

5.143 Finn avstanden fra $P(1,2,3)$ til planet $2x-y+2z=4$, og det nærmeste punktet i planet.

5.144 Finn avstanden mellom planene $x+2y+2z=3$ og $x+2y+2z=12$.

5.145 Finn avstanden mellom planene $2x-y+2z=1$ og $4x-2y+4z=14$.

5.146 Finn avstanden fra $P(3,0,0)$ til linja gjennom origo med retningsvektor $[1,2,2]$.

5.147 Finn avstanden fra $P(0,5,0)$ til x-aksen.

5.148 Finn avstanden fra $P(1,1,1)$ til linja $\vec{r}(t) = [0,0,0] + t[0,0,1]$ (z-aksen).

5.149 Linjene er $\vec{r}(t) = t[1,1,0]$ og $\vec{r}(s) = [0,0,3] + s[1,-1,0]$. Finn avstanden mellom dem.

5.150 Linjene er $\vec{r}(t) = [0,0,0] + t[1,0,0]$ og $\vec{r}(s) = [0,1,4] + s[0,0,1]$. Finn avstanden mellom dem.

5.151 Finn avstanden fra origo til planet $2x+3y+6z=14$, og punktet i planet som er nærmest origo.

5.152 En drone er i $(10,20,50)$ og et skråtak er planet $x+z=30$. Hvor langt er det til taket (målt vinkelrett på taket)?

5.153 Hva blir utskriften?

Python
```
from math import sqrt
print(round(abs(1 + 2 + 2 - 9) / sqrt(3), 3))
```

5.154 Finn avstanden fra $(0,0)$ til linja $3x+4y=10$ i planet, og forklar hvordan formelen for plan i rommet kan brukes.

5.155 Forklar hvorfor avstanden mellom to parallelle plan er avstanden fra ett punkt i det ene til det andre planet.

5.8.1 Kuleflater

EKSEMPEL *Fra sentrum og radius til likning*
Finn likningen for kuleflaten med sentrum $C(1,2,3)$ og radius 2. Ligger $(1,2,5)$ og $(2,2,3)$ på kuleflaten?

Løsning
$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.
For $(1,2,5)$ er venstresiden $0+0+4=4$ ✓, så punktet ligger på kuleflaten. For $(2,2,3)$ er den $1+0+0=1<4$, så punktet ligger inni kula. ∎

EKSEMPEL *Fullføre kvadratene*
Finn sentrum og radius når kuleflaten har likningen $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$.

Løsning
$$(x^2-2x) + (y^2+4y) + (z^2-6z) = 11$$
$$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 = 11$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$$
Sentrum er $C(1,-2,3)$ og radius er 5. ∎

EKSEMPEL *Linje gjennom kula*
Finn skjæringspunktene mellom linja $\vec{r}(t) = t\,[1,2,2]$ og kuleflaten $x^2+y^2+z^2=36$.

Løsning
$t^2+4t^2+4t^2 = 9t^2 = 36$ gir $t = \pm 2$. Punktene er $(2,4,4)$ og $(-2,-4,-4)$. Avstanden mellom dem er $2\cdot 2\cdot 3 = 12$, altså diameteren, siden linja går gjennom sentrum. ∎

EKSEMPEL *Tangent*
Linja er $\vec{r}(t) = [6,0,0] + t\,[0,1,0]$. Hva er forholdet til kuleflaten $x^2+y^2+z^2=36$?

Løsning
$36+t^2=36$ gir $t^2=0$, altså én dobbelt løsning $t=0$. Linja berører kuleflaten i $(6,0,0)$ og er en tangent. ∎

EKSEMPEL *Sirkel i kula*

Kuleflaten har sentrum $C(1,-2,3)$ og radius 5. Finn skjæringen med planet $x=4$.

Løsning

Avstanden er $d=3<5$. Skjæringen er en sirkel med radius $\sqrt{25-9}=4$ og sentrum $(4,-2,3)$. ∎

EKSEMPEL *Tangentplan*

Finn tangentplanet til kuleflaten $x^2+y^2+z^2=9$ i punktet $P(1,2,2)$.

Løsning

Normalvektoren er $[1,2,2]$, så planet har likningen $1(x-1)+2(y-2)+2(z-2)=0$, altså $x+2y+2z=9$. Kontroll: Avstanden fra origo er $\frac{9}{\sqrt{1+4+4}}=3=r$ ✓. ∎

5.156 Finn likningen for kuleflaten med

a) sentrum $(0,0,0)$ og radius 5

b) sentrum $(1,-2,3)$ og radius 4

c) sentrum $(-1,0,2)$ som går gjennom $(2,4,2)$

5.157 Finn sentrum og radius.

a) $(x+3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=49$

b) $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+5=0$

c) $x^2+y^2+z^2-4x=5$

5.158 Kuleflaten er $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$. Avgjør om punktene ligger på, inni eller utenfor kula.

a) $(1,3,3)$

b) $(2,-2,4)$

c) $(5,1,3)$

5.159 Finn skjæringspunktene mellom linja $\vec{r}(t)=t[1,2,2]$ og kuleflaten $x^2+y^2+z^2=36$.

5.160 Finn skjæringspunktene mellom linja $\vec{r}(t)=[3,0,0]+t[0,1,1]$ og kuleflaten $x^2+y^2+z^2=25$.

5.161 Avgjør om linja berører, skjærer eller går utenom kuleflaten $x^2+y^2+z^2=9$.

a) $\vec{r}(t)=[3,0,0]+t[0,1,0]$

b) $\vec{r}(t)=[4,0,0]+t[0,1,0]$

c) $\vec{r}(t)=[2,0,0]+t[0,1,0]$

5.162 Kuleflaten har sentrum $(1,-2,3)$ og radius 5. Hva er skjæringen med planene $z=3$ og $x=4$?

5.163 Finn tangentplanet til kuleflaten $x^2+y^2+z^2=9$ i punktet $(1,2,2)$.

5.164 Finn tangentplanet til kuleflaten $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$ i punktet $(1,3,3)$.

5.165 Finn likningen for kuleflaten gjennom $O(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ og $(0,0,2)$.

5.166 Hvilken kule har diameteren mellom $A(1,2,3)$ og $B(5,2,9)$?

5.167 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import sqrt
r, d = 13, 5
print(sqrt(r**2 - d**2))
```

Hva betyr tallet?

5.168 Forklar hvorfor høyresiden i kulelikningen er r^2 og ikke r.

5.169 Vis at tangentplanet til kuleflaten med sentrum C i punktet P har avstand r fra C.

Fasit

5.1.1 Koordinater i rommet

5.1

a) $\sqrt{9+16+144} = 13$

b) $\sqrt{9+16+0} = 5$

c) $\sqrt{1+4+4} = 3$

5.2

a) $(4,2,4)$

b) $(2,2,5)$

5.3

a) yz-planet ($x = 0$)

b) xz-planet ($y = 0$)

c) xy-planet ($z = 0$)

5.4

$(3,-2,0)$, $(3,0,7)$ og $(0,-2,7)$.

5.5

Avstanden til origo er $\sqrt{4+9+36} = 7$. Avstanden til xy-planet er $|z| = 6$.

5.6

$\sqrt{36+9+4} = 7$ m.

5.7

$|AB| = \sqrt{4+4+1} = 3$, $|AC| = \sqrt{4+1+4} = 3$ og $|BC| = \sqrt{0+9+9} = \sqrt{18}$. Siden $3^2+3^2 = 18 = |BC|^2$, er trekanten rettvinklet i A.

5.8

$4+16+(z-3)^2 = 36$ gir $(z-3)^2 = 16$, så $z = 7$ eller $z = -1$.

5.9

$B = 2M - A = (4-0, 2+1, 8-2) = (4,3,6)$.

5.10

$D = A + C - B = (1+5-4, 1+5-2, 0+3-1) = (2,4,2)$.

5.11

En kuleflate med sentrum i origo og radius 5: $x^2+y^2+z^2 = 25$.

5.12

```
7.0
```

5.13

```
def midtpunkt(A, B):
    return tuple((a + b) / 2 for a, b in
zip(A, B))

print(midtpunkt((2, 4, 6), (6, 0, 2)))
```

Utskriften er `(4.0, 2.0, 4.0)`.

5.14

Først gir Pythagoras i xy-planet at avstanden mellom projeksjonene er $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Så danner d og høydeforskjellen Δz katetene i en ny rettvinklet trekant, med $|AB|$ som hypotenus: $|AB| = \sqrt{d^2 + \Delta z^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

5.1.2 Vektorer i rommet

5.15

$\overrightarrow{AB} = [3,4,12]$, $|\overrightarrow{AB}| = 13$, midtpunkt $\left(\frac{5}{2}, 2, 8\right)$.

5.16

a) 3

b) $\sqrt{16+16+49} = 9$

c) 13

5.17

a) $[1,3,5]$

b) $[3,-5,1]$

c) $[6+2, -3-8, 9-4] = [8,-11,5]$

5.18

Lengden er 7, så enhetsvektoren er $\left[\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right]$.

5.19

Lengden er 13. Vektoren er $\frac{15}{13}[3,4,12] = \left[\frac{45}{13}, \frac{60}{13}, \frac{180}{13}\right]$.

5.20

a) Ja, $[-2,4,-6] = -2[1,-2,3]$.

b) Nei, de to første komponentene gir faktor 2, men tredje komponent gir $\frac{6}{4}$.

5.21

$-6 = 4s$ gir $s = -\frac{3}{2}$. Kontroll: $9 = -6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$ ✓. Da er $t = 2s = -3$.

5.22

$\overrightarrow{AB} = [2,4,6]$ og $\overrightarrow{AC} = [5,10,15] = 2{,}5\overrightarrow{AB}$. Ja.

5.23

$\overrightarrow{AB} = [8,8,-4]$, så $\overrightarrow{AP} = [2,2,-1]$ og $P = (4,2,3)$.

5.24

$\vec{b} = 2\vec{a}$ gir $y = 5$ og $z = 6$.

5.25

```
[3 2 1] [0 4 5]
```

5.26

```
7.0
```

5.27

$\overrightarrow{BA} = A - B = -(B - A) = -\overrightarrow{AB}$. Vektorene har samme lengde og motsatt retning.

5.28

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$. ■

5.29

$\left(\frac{6}{3}, \frac{6}{3}, \frac{3}{3}\right) = (2,2,1)$.

5.2.1 Skalarproduktet

5.30

a) $2+0-3 = -1$

b) $6-2+4 = 8$

c) 3

5.31

a) $3+0-3 = 0$: ja

b) $2-2+0 = 0$: ja

c) $1+2+3 = 6 \neq 0$: nei

5.32

$3t + 2t - 4 = 0$ gir $t = \frac{4}{5}$.

5.33

$3x - 4 + 2x = 0$ gir $5x = 4$, så $x = \frac{4}{5}$.

5.34

$\cos\theta = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}}$, så $\theta = 45°$. For det andre paret er $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, så $\theta = 60°$.

5.35

$\cos\theta = \frac{4}{9}$, så $\theta \approx 63{,}6°$.

5.36

$\overrightarrow{AB} = [-1,2,0]$, $\overrightarrow{AC} = [-1,0,3]$, $\overrightarrow{BC} = [0,-2,3]$. I A: $\cos A = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{10}} \approx 0{,}141$, så $A \approx 81{,}9°$. I B: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = [1,-2,0] \cdot [0,-2,3] = 4$, og $\cos B = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{13}} \approx 0{,}496$, så $B \approx 60{,}3°$. I C: $C = 180° - A - B \approx 37{,}9°$.

5.37

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 20$, $|\vec{b}|^2 = 9$. Projeksjonen er $\frac{20}{9}[1,2,2]$ med lengde $\frac{20}{3}$.

5.38

$\frac{4}{1}[1,0,0] = [4,0,0]$.

5.39

$W = 15 - 8 + 2 = 9$ J.

5.40
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$. ■

5.41
Fra forrige oppgave er skalarproduktet $|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$, altså $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.
Diagonalene i et parallellogram står vinkelrett nøyaktig når sidene er like lange (en rombe).

5.42
-1

5.43
60

5.44
$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, og $\cos\theta < 0$ når $90° < \theta \leqslant 180°$. Da er produktet negativt. Fysisk: kraften virker mot bevegelsen, og arbeidet er negativt.

5.2.2 Vektorproduktet

5.45
a) $[0\cdot 0 - 2\cdot 1, 2\cdot 3 - 1\cdot 0, 1\cdot 1 - 0\cdot 3] = [-2, 6, 1]$
b) $[2-12, 3+4, 8+1] = [-10, 7, 9]$
c) $[0\cdot 1 - 0\cdot 0, 0\cdot 0 - 1\cdot 1, 1\cdot 0 - 0\cdot 0] = [0, -1, 0]$ (altså $\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$)

5.46
$[2,-1,3]\cdot[-10,7,9] = -20 - 7 + 27 = 0$.

5.47
$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$ og $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$.

5.48
$[1,1,0]\times[0,1,1] = [1\cdot 1 - 0\cdot 1, 0\cdot 0 - 1\cdot 1, 1\cdot 1 - 1\cdot 0] = [1,-1,1]$.

5.49
$[1,2,2]\times[2,-1,2] = [6,2,-5]$ med lengde $\sqrt{65}$. Enhetsvektoren er $\frac{1}{\sqrt{65}}[6,2,-5]$ (eller den motsatte).

5.50
$[1,-2,3]\times[-2,4,-6] = [12-12, -6+6, 4-4] = [0,0,0]$. Ja, de er parallelle.

5.51
$|\vec{a}\times\vec{b}| = 2\cdot 3\cdot\sin 30° = 3$.

5.52
$12\sin\theta = 6\sqrt{3}$ gir $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, så $\theta = 60°$ eller $\theta = 120°$.

5.53
$\vec{a}\times\vec{b} = [-3,0,1]$ og $\vec{a}\times\vec{c} = [2,2,-2]$, summen er $[-1,2,-1]$. Videre er $\vec{b}+\vec{c} = [1,1,1]$ og $\vec{a}\times[1,1,1] = [2-3, 3-1, 1-2] = [-1,2,-1]$ ✓.

5.54
$\vec{b}\times\vec{a} = [b_2a_3 - b_3a_2, b_3a_1 - b_1a_3, b_1a_2 - b_2a_1] = -[a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1] = -\vec{a}\times\vec{b}$. ■

5.55
Fra $\vec{a}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{a}$ følger $2(\vec{a}\times\vec{a}) = \vec{0}$. Eller: Vinkelen mellom $\vec{a}$ og seg selv er 0, så $|\vec{a}\times\vec{a}| = |\vec{a}|^2\sin 0 = 0$.

5.56
`[0 1 0]`. Det er $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$.

5.57
`[0 0 0]`

5.58
```
def kryss(a, b):
    return [a[1]*b[2] - a[2]*b[1],
            a[2]*b[0] - a[0]*b[2],
            a[0]*b[1] - a[1]*b[0]]

print(kryss([1, 2, 3], [4, 5, 6]))
```
Utskriften er `[-3, 6, -3]`.

5.3.1 Areal og volum med vektorer

5.59
a) $\|[0,0,12]\| = 12$
b) $[1,2,3]\times[2,0,1] = [2-0, 6-1, 0-4] = [2,5,-4]$ med lengde $\sqrt{4+25+16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}71$

5.60
$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = [6,3,2]$ med lengde 7, så arealet er 3,5.

5.61
$[2,2,1]\times[2,-1,-2] = [-4+1, 2+4, -2-4] = [-3,6,-6]$ med lengde $\sqrt{9+36+36} = 9$. Arealet er 4,5.

5.62
Arealet er 4,5. Siden $|AB| = 3$ er høyden $h = \frac{2\cdot 4{,}5}{3} = 3$.

5.63
$[1,0,0]\times[1,2,0] = [0,0,2]$ og $[0,0,2]\cdot[1,1,3] = 6$. Volumet er 6.

5.64
$[1,2,0]\times[0,1,3] = [6,-3,1]$, og $[6,-3,1]\cdot[2,0,1] = 13$. Volumet er 13.

5.65
$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = [0,0,6]$, og $[0,0,6]\cdot[0,0,4] = 24$. $V = \frac{24}{6} = 4$. Kontroll: grunnflate $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 = 3$, høyde 4, så $\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 4 = 4$.

5.66
$\overrightarrow{AB} = [2,0,0]$, $\overrightarrow{AC} = [0,3,0]$, $\overrightarrow{AD} = [0,0,5]$. Skalartrippelproduktet er 30, så $V = \frac{30}{6} = 5$.

5.67
a) $\vec{B}\times\vec{C} = [0-3, 6-0, 1-4] = [-3,6,-3]$ og $[-3,6,-3]\cdot[3,3,3] = 0$. Ja.
b) $[1,0,0]\times[0,1,0] = [0,0,1]$ og $[0,0,1]\cdot[1,1,1] = 1 \neq 0$. Nei.

5.68
$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = [-3,6,-3]$, og $[-3,6,-3]\cdot[1,1,z] = -3+6-3z = 0$ gir $z = 1$.

5.69
$V = 1$ og grunnflaten ABC har areal 3,5. Fra $V = \frac{1}{3}\cdot 3{,}5\cdot h$ får vi $h = \frac{6}{7} \approx 0{,}857$.

5.70
`6.0`. Det er arealet av parallellogrammet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

5.71
```
import numpy as np

A = np.array([1, 2, 3])
B = np.array([2, 4, 5])
C = np.array([3, 3, 1])
n = np.cross(B - A, C - A)
print(np.linalg.norm(n) / 2)
```
Utskriften er `4.5`.

5.72
Fortegnet til $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ avhenger av om $\vec{c}$ peker på samme side av planet til $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som vektorproduktet. Peker $\vec{c}$ på motsatt side, blir tallet negativt. Volumet er en lengde i tredje potens og er alltid positivt, så vi tar absoluttverdien.

5.4.1 Linjer i rommet

5.73
$x = 1+2t$, $y = 2-t$, $z = 3+4t$. For $t = 2$: $(5,0,11)$. For $t = -1$: $(-1,3,-1)$.

5.74
$\overrightarrow{PQ} = [3,3,3]$. Linja er $x = 2+3t$, $y = 3t$, $z = -1+3t$ (eller med $[1,1,1]$: $x = 2+t$, $y = t$, $z = -1+t$).

5.75
a) $x = 5$ gir $t = -1$. Da er $y = 0$ ✓ og $z = -4$ ✓. Ja.
b) $x = 1$ gir $t = 1$. Da er $y = 2$ ✓ men $z = 4 \neq 3$. Nei.

5.76
xy-planet ($z = 0$): $t = 1$, punktet $(3, 1, 0)$. xz-planet ($y = 0$): $t = 2$, punktet $(5, 0, -3)$. yz-planet ($x = 0$): $t = -\frac{1}{2}$, punktet $\left(0, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

5.77
$t = 2s$ og $2 + 2s = 5 - s$ gir $s = 1$, $t = 2$. Tredje koordinat: $3 + 4 = 7$ og $4 + 3 = 7$ ✓. De skjærer i $(3, 4, 7)$.

5.78
Retningsvektorene er begge $[1, 1, 2]$, så linjene er parallelle. Punktet $(0, 1, 0)$ på l_1 (for $t = 0$) ligger også på l_2: $s = -2$ gir $(2 - 2, 3 - 2, 4 - 4) = (0, 1, 0)$. Linjene er derfor sammenfallende.

5.79
$t = 1 + s$, $2t = s$ gir $2 + 2s = s$, altså $s = -2$ og $t = -1$. Tredje koordinat: $3t = -3$ men $z = 1$. Ingen løsning, og retningsvektorene $[1, 2, 3]$ og $[1, 1, 0]$ er ikke parallelle. Linjene er vindskjeve.

5.80
$t = 1 + s$ og $1 + t = 2s$ gir $2 + s = 2s$, altså $s = 2$ og $t = 3$. Tredje koordinat: $2t = 6$, så $a = 6$.

5.81
Etter 5 s: $(30, -5, 5)$. $z = 0$ gir $t = \frac{20}{3} \approx 6{,}67$ s.

5.82
Banene krysser i $(4, 8, 3)$: Den første er der for $t = 4$ og den andre for $t = 8$. Dronene er altså i skjæringspunktet til ulike tider, så de kolliderer ikke. For en kollisjon må de være i samme punkt for samme t.

5.83
```
(8, 1, 0)
```

5.84
```
P = (5, 0, 2)
t = (P[0] - 2) / 3
print((2 + 3*t, -1 + t, 4 - 2*t) == P)
```
Utskriften er `True`.

5.85
I planet har to ikke-parallelle linjer alltid et skjæringspunkt, siden to likninger med to ukjente generelt har én løsning. I rommet er det tre likninger for to ukjente (t og s), og tredje likning er ikke nødvendigvis oppfylt, så det kan være ingen løsning.

5.4.2 Kurver, fart og akselerasjon

5.86
$\vec{v}(t) = [2t, 2]$ og $\vec{a}(t) = [2, 0]$. For $t = 3$ er $\vec{v} = [6, 2]$ og farten er $\sqrt{40} \approx 6{,}32$.

5.87
$\vec{v}(t) = [3, 2t - 6]$ og $|\vec{v}|^2 = 9 + (2t - 6)^2$. Den er minst når $2t - 6 = 0$, altså $t = 3$, med fart 3.

5.88
$\vec{v} = [-5\sin t, 5\cos t]$, $\vec{a} = [-5\cos t, -5\sin t]$. Farten er 5 og $|\vec{a}| = 5$.

5.89
$\vec{v} = [-6\sin 3t, 6\cos 3t]$ med fart 6. $\vec{a} = [-18\cos 3t, -18\sin 3t]$ med lengde 18. En runde tar $\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$ s.

5.90
Flytiden er $\frac{2 \cdot 25\sin 45°}{9{,}81} \approx 3{,}60$ s.

Rekkevidden er $\frac{625\sin 90°}{9{,}81} \approx 63{,}7$ m.

Høyeste punkt er $\frac{(25\sin 45°)^2}{2 \cdot 9{,}81} \approx 15{,}9$ m.

5.91
$y' = 12 - 10t = 0$ gir $t = 1{,}2$ og $y = 7{,}2$. Landing: $y = 0$ gir $t = 2{,}4$ og $x = 24$. I toppunktet er $\vec{v} = [10, 0]$, så farten er 10 m/s.

5.92
$\vec{v} = [-2\sin t, 2\cos t, 3]$ med fart $\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$. $\vec{a} = [-2\cos t, -2\sin t, 0]$.

5.93
Punktet er $(1, 1)$, og fartsvektoren er $\vec{v}(1) = [1, 2]$. Tangenten er $x = 1 + s$, $y = 1 + 2s$, altså linja $y = 2x - 1$.

5.94
$\vec{v} = [2, -1, 4]$ (konstant), $\vec{a} = \vec{0}$ og farten er $\sqrt{4 + 1 + 16} = \sqrt{21} \approx 4{,}58$ m/s. Bevegelsen er rettlinjet med konstant fart.

5.95
$45 - 4{,}905\,t^2 = 0$ gir $t = \sqrt{\frac{45}{4{,}905}} \approx 3{,}03$ s. $\vec{v} = [0, -9{,}81\,t]$, så farten er $9{,}81 \cdot 3{,}03 \approx 29{,}7$ m/s.

5.96
$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{400}{9{,}81} \approx 40{,}8$ m.
Rekkevidden er størst når $\sin 2\alpha = 1$, altså $\alpha = 45°$.

5.97
6.32

5.98
30 20. Det er posisjonen $(30, 20)$ til ballen $\vec{r}(t) = [15t, 20t - 5t^2]$ etter 2 s, i toppunktet.

5.99
Fartsvektoren er grensen av $\frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$ når $h \to 0$. Vektoren $\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)$ går mellom to nære punkter på kurven, og i grensen peker den langs kurven. Det er tangentretningen.

5.100
$\vec{v} = [a, b, c]$ er konstant, så farten $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ er konstant, og $\vec{a} = \vec{v}' = \vec{0}$. ■

5.5.1 Likning og parameterframstilling for plan

5.101
$(x - 2) + 2(y + 1) - 2(z - 3) = 0$ gir $x + 2y - 2z + 10 = 0$.

5.102
a) $[3, -1, 5]$
b) $[1, 0, 2]$
c) $[0, 0, 1]$ (planet er vannrett)

5.103
a) $2 - 2 + 12 = 12$: ja
b) $0 - 4 + 16 = 12$: ja
c) $10 - 0 + 4 = 14 \neq 12$: nei

5.104
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [6, 3, 2]$ og A gir $6x + 3y + 2z = 6$.

5.105
$\overrightarrow{AB} = [1, 2, 1]$ og $\overrightarrow{AC} = [-1, 1, 2]$. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [4 - 1, -1 - 2, 1 + 2] = [3, -3, 3]$, så $x - y + z = d$ med A: $d = 0$. Likningen er $x - y + z = 0$.

5.106
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-2, 2, 0]$. Likningen er $x - y + 1 = 0$ (med A: $1 - 2 + 1 = 0$).

5.107
$\vec{n} = [1, 2, 0] \times [0, 1, 3] = [6, -3, 1]$. Med punktet $(1, 0, 2)$ er $6x - 3y + z = 8$.

5.108
For eksempel $\vec{r}(s, t) = [2, 2, 2] + s[1, -1, 0] + t[0, 1, -1]$. Begge retningsvektorene står vinkelrett på $[1, 1, 1]$.

5.109
$\overrightarrow{AB} = [-1, 2, 0]$ og $\overrightarrow{AC} = [-1, 0, 3]$. $\vec{r}(s, t) = [1, 0, 0] + s[-1, 2, 0] + t[-1, 0, 3]$.

5.110
Normalvektor $\overrightarrow{AB} = [2, -2, 4]$ og midtpunkt $(2, 1, 5)$. $2x - 2y + 4z = 22$, altså $x - y + 2z = 11$.

5.111
x-aksen: $(6, 0, 0)$. y-aksen: $(0, 4, 0)$. z-aksen: $(0, 0, 2)$.

5.112
6. Det er høyresiden i likningen $6x + 3y + 2z = 6$.

5.113
De to første, siden normalvektorene $[1, 2, -1]$ og $[2, 4, -2]$ er parallelle.

5.114
Både $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ ligger i planet. Vektorproduktet står vinkelrett på begge, så det står vinkelrett på planet.

5.115
Likningen $2ax + 2by + 2cz = 2d$ beskriver det samme planet. Normalvektoren blir $[2a, 2b, 2c]$, som er parallell med den gamle.

5.5.2 Skjæring mellom linjer og plan

5.116
$(1 + 2t) + 2t + (2 - t) = 3 + 3t = 9$ gir $t = 2$. Punktet er $(5, 2, 0)$.

5.117
$2t + (1 + 2t) + 3(2 - t) = 7 + t = 13$ gir $t = 6$. Punktet er $(6, 13, -4)$.

5.118
xy-planet ($z = 0$): $t = 3$, punkt $(4, 2, 0)$. xz-planet ($y = 0$): $y = 2$ for alle t, ingen skjæring (linja er parallell med xz-planet). yz-planet ($x = 0$): $t = -1$, punkt $(0, 2, 4)$.

5.119
a) $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ og startpunktet gir $1 \neq 3$: parallell, ingen skjæring.
b) $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ og $2 + 2 + 2 = 6$: linja ligger i planet.
c) $\vec{n} \cdot \vec{v} = 3 \neq 0$: skjærer i ett punkt, $3t = 6$, $t = 2$: $(2, 2, 2)$.

5.120
$\vec{n} \cdot \vec{v} = 2 + 1 + a = 0$ gir $a = -3$.

5.121
Retningsvektor $[1, 1, 1] \times [1, -1, 2] = [3, -1, -2]$. Med $z = 0$: $x = 4{,}5$, $y = 1{,}5$. Linja er $x = 4{,}5 + 3t$, $y = 1{,}5 - t$, $z = -2t$.

5.122
Retningsvektor $[1, 2, -1] \times [2, -1, 1] = [2 - 1, -2 - 1, -1 - 4] = [1, -3, -5]$. Med $z = 0$: $x + 2y = 4$ og $2x - y = 5$ gir $x = 2{,}8$ og $y = 0{,}6$. Linja er $x = 2{,}8 + t$, $y = 0{,}6 - 3t$, $z = -5t$.

5.123
a) Normalvektorene $[1, 2, -1]$ og $[2, 4, -2]$ er parallelle, og planene er parallelle (ikke sammenfallende, siden $2 \cdot 3 = 6 \neq 8$).
b) Normalvektorene er ikke parallelle, så planene skjærer hverandre langs en linje.

5.124
Det første er $(1, 2, 3)$. For det andre: $z = 3$ gir $x + y = 3$, og $x - y = -1$ gir $x = 1$ og $y = 2$. Punktet er $(1, 2, 3)$.

5.125
```
[ 4. -2.  7.]
```

5.126
$5 - t = 0$ gir $t = 5$. Strålen treffer i $(5, 5, 0)$.

5.127
To plan som ikke er parallelle har normalvektorer som ikke er parallelle. Likningssystemet med to likninger og tre ukjente har da en løsning med én fri parameter, og det er en rett linje.

5.128
Skjæringslinja ligger i begge planene, så retningsvektoren $\vec{v}$ står vinkelrett på $\vec{n}_1$ og på $\vec{n}_2$, og det er nøyaktig det $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ gjør. ■

5.6.1 Vinkler mellom linjer og plan

5.129
a) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$: $45°$
b) $\cos\theta = \frac{1}{2}$: $60°$
c) $\cos\theta = \frac{4}{9}$: $63{,}6°$

5.130
Vektorene er parallelle ($[-2, 4, -6] = -2[1, -2, 3]$), så vinkelen mellom linjene er $0°$.

5.131
a) $\sin\varphi = \frac{6}{\sqrt{14}\sqrt{3}} \approx 0{,}926$: $\varphi \approx 67{,}8°$
b) $\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{14}} \approx 0{,}802$: $\varphi \approx 53{,}3°$

5.132
Det første planet har normalvektor $[1, -1, 0]$. $\sin\varphi = 0$, så $\varphi = 0°$: Linja ligger i (eller er parallell med) planet. Det andre har normalvektor $[1, 1, 0]$, og $\sin\varphi = \frac{2}{2} = 1$, så $\varphi = 90°$.

5.133
a) $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{18}} \approx 0{,}471$: $61{,}9°$
b) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$: $54{,}7°$
c) $\cos\theta = \frac{|2 + 6 + 12|}{3 \cdot 7} = \frac{20}{21}$: $17{,}8°$

5.134
En sideflate har normalvektor $[0, 0, 1]$ (eller $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$). $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, så $\varphi \approx 35{,}3°$.

5.135
$\cos\theta = \frac{|[1, 0, 1] \cdot [0, 0, 1]|}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, så $\theta = 45°$.

5.136
$[1, 2, a] \cdot [2, 1, 2] = 2 + 2 + 2a = 0$ gir $a = -2$.

5.137
$\vec{n} \cdot \vec{v} = 1 + 2 + a = 0$ gir $a = -3$.

5.138
$\sin\varphi = \frac{|[0, 0, 1] \cdot [1, 0, -1]|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, så $\varphi = 45°$.

5.139
45

5.140
```
import numpy as np

n = np.array([1, 1, 1])
v = np.array([1, 2, 3])
s = abs(n @ v) / (np.linalg.norm(n) *
np.linalg.norm(v))
print(round(np.degrees(np.arcsin(s)),
1))
```
Utskriften er `67.8`.

5.141
En retningsvektor eller normalvektor kan peke i begge retninger. Absoluttverdien sørger for at vi får den spisse vinkelen (mellom $0°$ og $90°$), uavhengig av hvilken retning vi valgte.

5.7.1 Avstander

5.142
a) $\frac{9}{3} = 3$
b) $\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$
c) $\frac{|6 + 4 - 12 - 5|}{13} = \frac{7}{13} \approx 0{,}54$

5.143
Avstanden er $\frac{|2-2+6-4|}{3} = \frac{2}{3}$.
Linja $P + t[2,-1,2]$ treffer planet for $t = -\frac{2}{9}$, i punktet $\left(\frac{5}{9}, \frac{20}{9}, \frac{23}{9}\right)$.

5.144
$\frac{|12-3|}{3} = 3$.

5.145
Del den andre på 2: $2x - y + 2z = 7$.
Avstanden er $\frac{|7-1|}{3} = 2$.

5.146
$[3,0,0] \times [1,2,2] = [0,-6,6]$ med lengde $6\sqrt{2}$. Avstanden er $\frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$.

5.147
x-aksen har $A = (0,0,0)$ og $\vec{v} = [1,0,0]$. $\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = [0,5,0] \times [1,0,0] = [0,0,-5]$ med lengde 5. Avstanden er 5.

5.148
$[1,1,1] \times [0,0,1] = [1,-1,0]$ med lengde $\sqrt{2}$. Avstanden er $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

5.149
$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = [0,0,-2]$, og $[0,0,3] \cdot [0,0,-2] = -6$. Avstanden er $\frac{6}{2} = 3$.

5.150
$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = [1,0,0] \times [0,0,1] = [0,-1,0]$ med lengde 1. $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot [0,-1,0] = -1$. Avstanden er 1.

5.151
Avstanden er $\frac{14}{7} = 2$. Normalen $t[2,3,6]$ treffer planet når $49t = 14$, altså $t = \frac{2}{7}$. Punktet er $\left(\frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \frac{12}{7}\right)$.

5.152
$\frac{|10+50-30|}{\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{2}} \approx 21{,}2$ m.

5.153
2.309. Det er avstanden fra $(1,2,2)$ til planet $x + y + z = 9$: $\frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2{,}309$.

5.154
$\frac{|-10|}{\sqrt{9+16}} = 2$. Formelen for plan i rommet gjelder også i planet ved å fjerne z-leddet.

5.155
Parallelle plan har samme normalvektor, og alle punkter i det ene har samme avstand til det andre. Avstanden er derfor den samme uansett hvilket punkt vi velger.

5.8.1 Kuleflater

5.156
a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
b) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$
c) Radius $\sqrt{9+16+0} = 5$: $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 25$

5.157
a) Sentrum $(-3,1,4)$, radius 7.
b) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = -5+9+1+4 = 9$: sentrum $(3,-1,2)$, radius 3.
c) $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 9$: sentrum $(2,0,0)$, radius 3.

5.158
a) $0 + 25 + 0 = 25$: på kuleflaten
b) $1 + 0 + 1 = 2 < 25$: inni
c) $16 + 9 + 0 = 25$: på kuleflaten

5.159
$9t^2 = 36$ gir $t = \pm 2$. Punktene er $(2,4,4)$ og $(-2,-4,-4)$.

5.160
$9 + t^2 + t^2 = 25$ gir $t^2 = 8$, $t = \pm 2\sqrt{2}$. Punktene er $\left(3, \pm 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}\right)$ (samme fortegn): $(3, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ og $(3, -2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

5.161
a) $9 + t^2 = 9$ gir $t = 0$ (dobbel løsning): tangent.
b) $16 + t^2 = 9$ har ingen løsning: går utenom.
c) $4 + t^2 = 9$ gir $t = \pm\sqrt{5}$: skjærer i to punkter.

5.162
$z = 3$ går gjennom sentrum ($d = 0$): en sirkel med radius 5 og sentrum $(1,-2,3)$. $x = 4$ har $d = 3$: en sirkel med radius $\sqrt{25-9} = 4$ og sentrum $(4,-2,3)$.

5.163
Normalvektoren er $[1,2,2]$, så $x + 2y + 2z = 1 + 4 + 4 = 9$.

5.164
Sentrum er $(1,-2,3)$ og $\overrightarrow{CP} = [0,5,0]$. Planet er $5(y-3) = 0$, altså $y = 3$.

5.165
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$, altså $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$.

5.166
Sentrum er midtpunktet $(3,2,6)$. Radius er $\frac{|AB|}{2} = \frac{\sqrt{16+0+36}}{2} = \sqrt{13}$. Likningen er $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-6)^2 = 13$.

5.167
12.0. Det er radien i sirkelen der et plan med avstand 5 fra sentrum skjærer en kuleflate med radius 13.

5.168
Avstandsformelen $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$ har kvadratrot på venstresiden. Kvadrerer vi begge sider, forsvinner roten og høyresiden blir r^2.

5.169
Tangentplanet har normalvektor $\overrightarrow{CP}$ og går gjennom P. Avstanden fra C til planet er lengden av projeksjonen av $\overrightarrow{CP}$ på normalvektoren, og siden $\overrightarrow{CP}$ er normalvektoren selv, er avstanden $|\overrightarrow{CP}| = r$. ■