4 Modeller

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler. Fasiten står bakerst.

Formelark

REGRESJON OG MODELLER

Avvik

$$r_i = y_i - f(x_i)$$

Determinasjonskoeffisient

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

Eksponentiell modell

$$\ln y = \ln a + x \ln b$$

PERIODISKE MODELLER OG ANALYSE

Sinusmodell

$$f(t) = A\sin(ct + \varphi) + d, \quad c = \frac{2\pi}{T}$$

Samlet endring

$$\int_a^b g'(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

Gjennomsnittsverdi

$$\bar{g} = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx$$

VEKSTMODELLER

Eksponentiell

$$N = N_0 e^{kt}$$

Begrenset

$$N = L - (L - N_0)e^{-kt}$$

Logistisk

$$N = \frac{L}{1 + ae^{-kt}}, \quad a = \frac{L - N_0}{N_0}$$

DIFFERENSIALLIKNINGER

Separabel

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx$$

Eulers metode

$$y_{n+1} = y_n + h\,F(x_n, y_n)$$

SVINGNINGER

Svingelikningen

$$x'' = -\omega^2 x, \quad x = R\sin(\omega t + \varphi)$$

Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

4.1.1 Modeller og regresjon

EKSEMPEL *Prognose for 2030*

Bruk de tre modellene til å anslå konsentrasjonen i 2030 (altså $x = 70$). Hva sier forskjellen mellom dem?

Løsning

Lineær: $1{,}611 \cdot 70 + 310{,}2 \approx 423{,}0$. Kvadratisk: $0{,}0134 \cdot 70^2 + 0{,}809 \cdot 70 + 316{,}86 \approx 439{,}0$. Eksponentiell: $312{,}3 \cdot 1{,}00448^{70} \approx 426{,}9$.

Modellene gir svar fra 423 til 439 ppm. Forskjellen viser at ekstrapolering er usikker, selv når alle modellene passer godt til målingene. Hvilken modell som er riktig utenfor måleområdet, avhenger av hva som egentlig skjer i naturen, ikke bare av hvilken kurve som passer best. ∎

4.1 Modellen $f(x) = 2x + 1$ er tilpasset målingene $(0;1{,}2)$, $(1;2{,}8)$, $(2;5{,}3)$ og $(3;6{,}9)$. Regn ut avvikene $r_i = y_i - f(x_i)$ og summen av kvadratavvikene.

4.2 Avgjør om hver tabell passer best til en lineær, kvadratisk eller eksponentiell modell.

a) y: $3, 6, 12, 24, 48$

b) y: $2, 5, 8, 11, 14$

c) y: $1, 4, 9, 16, 25$

(Verdiene hører til $x = 1, 2, 3, 4, 5$.)

4.3 En lineær modell skal gå gjennom punktene $(0;316{,}9)$ og $(60;414{,}2)$. Finn modellen og bruk den til å anslå verdien for $x = 70$.

4.4 En eksponentiell modell $f(x) = a \cdot b^x$ går gjennom $(0, 50)$ og $(5, 80)$. Finn a, b og den årlige prosentvise veksten.

4.5 En størrelse følger modellen $f(x) = 200 \cdot 1{,}03^x$, der x er antall år. Hva betyr tallene 200 og 1,03, og hva er $f(10)$?

4.6 Hvor lang tid tar det å doble en størrelse som vokser med 5 % per år?

4.7 En kvadratisk modell er $f(x) = -0{,}5\,x^2 + 4x + 1$. Finn toppunktet og forklar hva det betyr hvis f er en bestand over tid.

4.8 Hvilken modelltype passer best til gjennomsnittstemperaturen per måned gjennom flere år? Begrunn.

4.9 Hva betyr $R^2 = 1$? Kan en modell ha $R^2 = 1$ og likevel være dårlig?

4.10 Hva blir utskriften?

Python

```
import numpy as np
x = np.array([0, 1, 2, 3])
y = np.array([2, 4, 6, 8])
a, b = np.polyfit(x, y, 1)
print(round(a, 2), round(b, 2))
```

4.11 Hva blir utskriften?

Python

```
import numpy as np
x = np.array([0, 1, 2, 3])
y = np.array([2, 6, 18, 54])
lnb, lna = np.polyfit(x, np.log(y), 1)
print(round(np.exp(lnb), 2), round(np.exp(lna),
2))
```

Hvilken modell har programmet funnet?

4.12 Tilpass en linje gjennom origo $y = ax$ til punktene $(1;2{,}1)$, $(2;3{,}9)$ og $(3;6{,}2)$ med formelen $a = \dfrac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$.

4.13 Forklar hvorfor det er farligere å ekstrapolere enn å interpolere.

4.14 Vis at $y = a \cdot b^x$ blir lineær hvis vi tar logaritmen.

4.15 Data viser at en størrelse øker fra 100 til 121 på 2 år. Hva er den årlige veksten hvis den er konstant?

4.1.2 Periodiske modeller

EKSEMPEL *Når er dagen lengre enn 16 timer?*

Bruk modellen $D(t) = 6{,}14 \sin\left(\dfrac{2\pi}{365}t - 1{,}377\right) + 12{,}0$ til å finne hvilke dager dagslengden er minst 16 timer.

Løsning

$D(t) = 16$ gir $\sin u = \dfrac{16 - 12}{6{,}14} \approx 0{,}6515$, så $u \approx 0{,}7095$ eller $u \approx \pi - 0{,}7095 \approx 2{,}4321$. Da er $t = \dfrac{365}{2\pi}(u + 1{,}377)$:

$$t \approx 121 \qquad \text{og} \qquad t \approx 221$$

Dagene 121 til 221 har dagslengde minst 16 timer, altså fra 1. mai til 9. august, omtrent 100 dager. ∎

EKSEMPEL *Hvor fort endres dagslengden?*

Hvor fort øker dagslengden som mest, og når skjer det?

Løsning

$D'(t) = 6{,}14 \cdot \dfrac{2\pi}{365} \cos\left(\dfrac{2\pi}{365}t - 1{,}377\right)$. Størst verdi er $6{,}14 \cdot \dfrac{2\pi}{365} \approx 0{,}106$ timer per dag, altså omtrent 6,3 minutter per dag. Det skjer når cosinus er 1, altså når $\dfrac{2\pi}{365}t = 1{,}377$, som er $t \approx 80$ (rundt vårjevndøgn). Da er dagslengden 12 timer og øker raskest. ∎

4.16 Gitt sinusmodellen $f(t) = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}t - 1\right) + 10$. Finn amplitude, likevektslinje, periode, største og minste verdi.

4.17 En regresjon ga $a = 2$ og $b = 3$ i $a\sin(ct) + b\cos(ct) + d$. Finn $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ og vinkelen φ med $\cos\varphi = \frac{a}{A}$ og $\sin\varphi = \frac{b}{A}$ (i første kvadrant).

4.18 Skriv $\sin(ct) + \cos(ct)$ på formen $A\sin(ct + \varphi)$.

4.19 Månedsgjennomsnittet av temperatur er modellert som $T(m) = 8\sin\left(\frac{\pi}{6}(m-4)\right) + 6$, der $m = 1$ er januar og $m = 12$ er desember. Hvilken måned er varmest, og hva er temperaturen da? Hva er den laveste temperaturen, og når?

4.20 Hva sier modellen i forrige oppgave at temperaturen er i april ($m = 4$)?

4.21 Daglengden i Oslo er modellert som $D(t) = 6{,}14\sin\left(\frac{2\pi}{365}t - 1{,}377\right) + 12$. Hva er den lengste dagen ifølge modellen, og omtrent hvilken dag kommer den?

4.22 Når er dagslengden 12 timer i modellen?

4.23 Dagslengden øker raskest ved $t \approx 80$. Hvor stor er økningen per dag, hvis amplituden er 6,14 timer og perioden 365 dager?

4.24 Temperaturen i løpet av et døgn er modellert som $T(t) = 4\sin\left(\frac{2\pi}{24}(t-9)\right) + 8$. Finn høyeste og laveste temperatur og når de inntreffer. Når er temperaturen 10 grader?

4.25 Dataene er månedsgjennomsnitt, og t er måned nummer. Per bruker perioden 365 i modellen. Hva er galt?

4.26 Hva blir utskriften?

Python

```
import numpy as np
x = np.array([0, np.pi/2, np.pi, 3*np.pi/2])
y = np.array([2, 0, -2, 0])
M = np.column_stack([np.sin(x), np.cos(x),
                     np.ones_like(x)])
koef = np.linalg.lstsq(M, y, rcond=None)[0]
print(round(koef[1], 2))
```

4.27 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import sqrt, atan2
a, b = 3, 4
print(round(sqrt(a**2 + b**2), 1), round(atan2(b,
a), 3))
```

4.28 Forklar hvorfor vi kan bruke lineær regresjon for å finne a, b og d i $a\sin(ct) + b\cos(ct) + d$.

4.29 Høyvann er 3,0 m klokka 6 : 00, og lavvann er 1,0 m 6,2 timer senere. Lag en modell $h(t) = A\cos(\omega(t-6)) + d$ og finn h klokka 9 : 06.

4.30 Hvorfor passer ikke en sinusmodell til en befolkning som vokser jevnt?

4.2.1 Derivasjon og integrasjon i modeller

EKSEMPEL *Hvor fort stiger CO_2?*

CO_2-konsentrasjonen er modellert som $g(x) = 0{,}0134\,x^2 + 0{,}8086\,x + 316{,}86$ ppm, der x er år siden 1960. Finn $g'(x)$, og regn ut endringsfarten i 1960, 1990 og 2020. Hvor stor er den relative veksten i 2020?

Løsning

$g'(x) = 0{,}0268\,x + 0{,}8086$.

I 1960 ($x = 0$): $g'(0) = 0{,}81$ ppm per år. I 1990 ($x = 30$): $g'(30) = 1{,}61$ ppm per år. I 2020 ($x = 60$): $g'(60) = 2{,}42$ ppm per år.

Stigningen har altså tredoblet seg på 60 år. I 2020 er $g(60) \approx 413{,}6$, så den relative veksten er $\frac{2{,}42}{413{,}6} \approx 0{,}0058$, altså omtrent 0,58 % per år. ∎

EKSEMPEL *Økning fra 2000 til 2020*

CO_2-konsentrasjonen er modellert som $g(x) = 0{,}0134\,x^2 + 0{,}8086\,x + 316{,}86$ ppm, der x er år siden 1960. Hvor mye økte konsentrasjonen fra 2000 til 2020 ifølge modellen? Hva var gjennomsnittlig endringsfart?

Løsning

$g(60) = 413{,}6$ og $g(40) = 370{,}6$, så økningen er $413{,}6 - 370{,}6 = 43{,}0$ ppm. Gjennomsnittlig endringsfart er $\frac{43{,}0}{20} = 2{,}15$ ppm per år. Det er mellom $g'(40) = 1{,}88$ og $g'(60) = 2{,}42$, som det skal være for en voksende endringsfart. ∎

EKSEMPEL *Gjennomsnittlig konsentrasjon*

CO_2-konsentrasjonen er modellert som $g(x) = 0{,}0134\,x^2 + 0{,}8086\,x + 316{,}86$ ppm, der x er år siden 1960. Finn gjennomsnittlig konsentrasjon fra 1960 til 2020, altså gjennomsnittet av g på $[0, 60]$.

Løsning

En antiderivert er $G(x) = 0{,}0134 \cdot \frac{x^3}{3} + 0{,}8086 \cdot \frac{x^2}{2} + 316{,}86\,x$. Da er $G(60) - G(0) = 964{,}8 + 1455{,}5 + 19\,011{,}6 \approx 21\,431{,}9$, så gjennomsnittet er $\frac{21\,431{,}9}{60} \approx 357{,}2$ ppm. ∎

EKSEMPEL *Timer med dagslys*

Daglengden i Oslo er modellert som $D(t) = 6{,}14 \sin\left(\frac{2\pi}{365}t - 1{,}377\right) + 12$ timer. Hvor mange timer med dagslys er det i løpet av et år?

Løsning

Over en hel periode er integralet av sinusleddet 0, fordi de positive og negative delene er like store. Det som er igjen, er $\int_0^{365} 12\,dt = 12 \cdot 365 = 4380$. Det er 4380 timer med dagslys, altså gjennomsnittlig 12 timer per døgn. Det er likevektslinja som bestemmer gjennomsnittet. ∎

EKSEMPEL *Når passerer farten 3 ppm per år?*

CO_2-konsentrasjonen er modellert som $g(x) = 0{,}0134\,x^2 + 0{,}8086\,x + 316{,}86$ ppm, der x er år siden 1960. Når er endringsfarten i modellen 3 ppm per år?

Løsning

$0{,}0268\,x + 0{,}8086 = 3$ gir $x = \dfrac{3 - 0{,}8086}{0{,}0268} \approx 81{,}8$. Det er omtrent år 2042. Husk at dette er ekstrapolering: Modellen forutsetter at utviklingen fortsetter som før. ∎

EKSEMPEL *En bestand som blir negativ*

En bestand er modellert som $B(x) = -0{,}5\,x^2 + 4x + 1$ (i tusen individer), der x er år. For hvilke x gir modellen en rimelig bestand?

Løsning

$B(x) = 0$ gir $x^2 - 8x - 2 = 0$, så $x = 4 \pm \sqrt{18}$, altså $x \approx -0{,}24$ og $x \approx 8{,}24$. Bestanden er positiv for $0 \leqslant x < 8{,}24$. Etter omtrent 8,2 år gir modellen en negativ bestand, som er urimelig. Gyldighetsområdet er $0 \leqslant x \leqslant 8{,}2$. ∎

4.31 En befolkning er modellert som $P(t) = 0{,}2\,t^2 + 3t + 100$ (i tusen), der t er år. Finn $P'(t)$, endringsfarten etter 10 år, og endringen i befolkningen de første 10 årene.

4.32 Hva er enheten til $f'(t)$ når f måles i kg og t i uker? Og enheten til $\int_a^b f'(t)\,dt$?

4.33 Finn gjennomsnittsverdien til $P(t) = 0{,}2\,t^2 + 3t + 100$ på $[0, 10]$.

4.34 Temperaturen i en ovn er $T(t) = -0{,}5\,t^2 + 6t$ grader for $0 \leqslant t \leqslant 12$ minutter. Finn høyeste temperatur og når den inntreffer, og hvor fort temperaturen endrer seg etter 2 minutter.

4.35 Modellen i forrige oppgave gir $T(12) = 0$. Hva sier det om gyldighetsområdet?

4.36 Vannet i et basseng endrer seg med farten $V'(t) = 12 - 2t$ liter per minutt. Hva er den samlede endringen i vannmengden de første 10 minuttene, og når er mengden størst?

4.37 Posisjonen til en bil er $s(t) = t^2 + 2t$ meter. Finn gjennomsnittsfarten fra $t = 1$ til $t = 4$ og farten $v(t)$. Når er farten lik gjennomsnittsfarten?

4.38 Daglengden er modellert som $D(t) = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right) + 12$ timer. Hvor mange timer med dagslys er det i løpet av ett år, og hvor fort øker dagslengden som mest?

4.39 For $g(x) = 400 + 2x$ er $g'(x) = 2$. Finn den relative veksten $\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ for $x = 0$ og $x = 100$.

4.40 For $f(x) = 200 \cdot 1{,}05^x$: Finn $f'(0)$ og den relative veksten.

4.41 En bestand er $B(x) = -0{,}25\,x^2 + 3x + 2$. For hvilke $x \geqslant 0$ er modellen rimelig?

4.42 Hva blir utskriften?

Python

```
g = lambda x: x**3
h = 0.01
d = (g(2 + h) - g(2 - h)) / (2*h)
print(round(d, 2))
```

4.43 Hva blir utskriften?

Python

```
n = 3
dx = 1
s = (0 + 9) / 2
for i in range(1, n):
    s = s + (i * dx)**2
print(dx * s)
```

Hvilket integral er det anslaget for?

4.44 Forklar hva $\int_a^b f'(t)\,dt$ betyr, og hvordan det henger sammen med $f(b) - f(a)$.

4.3.1 Eksponentiell, begrenset og logistisk vekst

EKSEMPEL *Begrenset vekst: kaffen som kjøles ned*

En kopp kaffe på 80 grader står i et rom på 20 grader. Temperaturen følger modellen $T(t) = 20 + 60\,e^{-0{,}1\,t}$, der t er minutter. Hva er temperaturen etter 10 minutter, og når er den 30 grader?

Løsning

$T(10) = 20 + 60\,e^{-1} \approx 20 + 22{,}07 = 42{,}1$ grader.

$20 + 60\,e^{-0{,}1\,t} = 30$ gir $e^{-0{,}1\,t} = \dfrac{10}{60} = \dfrac{1}{6}$, så $-0{,}1\,t = -\ln 6$ og $t = 10 \ln 6 \approx 17{,}9$ minutter.

Modellen nærmer seg romtemperaturen 20 grader, som er grensen L. ∎

EKSEMPEL *Logistisk modell*

En bestand er modellert som $N(t) = \dfrac{1000}{1 + 9\,e^{-0{,}5\,t}}$. Finn startverdien, bestanden etter 4 år, og når bestanden er 500.

Løsning

$N(0) = \dfrac{1000}{1+9} = 100$. $N(4) = \dfrac{1000}{1+9e^{-2}} \approx \dfrac{1000}{2{,}218} \approx 450{,}9$.

$\dfrac{1000}{1+9e^{-0{,}5\,t}} = 500$ gir $1 + 9e^{-0{,}5\,t} = 2$, altså $e^{-0{,}5\,t} = \dfrac{1}{9}$, så $t = 2\ln 9 \approx 4{,}39$ år.

Siden 500 er halvparten av grensen 1000, er $t \approx 4{,}39$ også tidspunktet der veksten er raskest. ∎

EKSEMPEL *Størst vekstfart*

For modellen $N(t) = \dfrac{1000}{1 + 9\,e^{-0{,}5\,t}}$: Hvor stor er vekstfarten ved størst, og hvor mye vokser bestanden da per år?

Løsning

Med $N = 500$ er $N' = 0{,}5 \cdot 500 \cdot \left(1 - \dfrac{500}{1000}\right) = 125$.

Bestanden vokser med 125 per år når den er størst. Generelt er den største vekstfarten $\dfrac{kL}{4}$, her $\dfrac{0{,}5 \cdot 1000}{4} = 125$. ∎

4.45 Hvilken vekstmodell (eksponentiell, begrenset eller logistisk) passer best?

a) Antall bakterier i et glass de første timene, med rikelig næring.

b) Temperaturen til en kopp te som kjøles mot romtemperatur.

c) Antall som har kjøpt en ny mobil i et land, fra lansering og til nesten alle har den.

4.46 En bestand er $N(t) = 500\,e^{0{,}03\,t}$. Finn $N(10)$ og hvor lang tid det tar å doble bestanden.

4.47 En størrelse følger $N(t) = 800 - 700e^{-0{,}2\,t}$. Finn startverdien og grensen, $N(5)$ og når $N = 700$.

4.48 Temperaturen til en varm drikk er $T(t) = 22 + 58e^{-0{,}08\,t}$ grader. Hva var temperaturen i starten, hva er den etter 10 minutter, og når er den 40 grader?

4.49 En bestand er $N(t) = \dfrac{2000}{1 + 19e^{-0{,}4\,t}}$. Finn $N(0)$, $N(10)$ og når $N = 1000$.

4.50 Finn største vekstfart og tidspunktet den inntreffer for modellen i forrige oppgave.

4.51 En logistisk modell har $L = 500$ og $N(0) = 20$. Finn a.

4.52 Forklar hvorfor kurven til en logistisk modell har vendepunkt der $N = \dfrac{L}{2}$.

4.53 Målinger i en bakteriekultur med $L = 1200$ er $N(2) = 130$, $N(4) = 300$. Regn ut $z = \ln\left(\dfrac{L}{N} - 1\right)$ for begge, og anslå k fra stigningstallet mellom punktene.

4.54 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import exp
N = lambda t: 2000 / (1 + 19*exp(-0.4*t))
for t in [0, 5, 10]:
    print(round(N(t)))
```

4.55 Sammenlign $100\,e^{0{,}4\,t}$ og $\dfrac{2000}{1 + 19e^{-0{,}4\,t}}$ for $t = 20$. Hva sier svaret om eksponentiell vekst?

4.56 Vis at $T(t) = L - (L - N_0)e^{-kt}$ går mot L når $t \to \infty$ og har $T(0) = N_0$.

4.57 Kari skriver den logistiske modellen som $N = \dfrac{L}{1 + ae^{kt}}$ med $k > 0$. Hva skjer med kurven?

4.58 Hva er forskjellen mellom begrenset og logistisk vekst når det gjelder hvor veksten er raskest?

4.3.2 Vekstmodeller og differensiallikninger

EKSEMPEL *Kontrollere en løsning*

Vis at $y = Ce^{2x}$ løser $y' = 2y$ for en vilkårlig konstant C, og finn løsningen med $y(0) = 3$.

Løsning

Fra $y = Ce^{2x}$ får vi $y' = 2Ce^{2x} = 2y$. Det stemmer for alle C.

Fra $y(0) = Ce^0 = C = 3$ får vi løsningen $y = 3e^{2x}$. ∎

EKSEMPEL *Eksponentiell vekst*

Løs $N' = kN$ med $N(0) = N_0$, der $N > 0$.

Løsning

$\int \dfrac{1}{N}\,dN = \int k\,dt$ gir $\ln N = kt + C_1$. Opphøyer vi med e, får vi $N = e^{C_1}e^{kt} = Ce^{kt}$ med $C = e^{C_1}$. Fra $N(0) = N_0$ får vi $C = N_0$:

$$N(t) = N_0\,e^{kt}$$

∎

EKSEMPEL *Begrenset vekst*

Newtons avkjølingslov sier at temperaturen T til en gjenstand endrer seg proporsjonalt med forskjellen til omgivelsene: $T' = -k(T - T_o)$, der T_o er romtemperaturen. Løs likningen med $T(0) = T_0$.

Løsning
Integrasjon gir $\ln|T - T_o| = -kt + C_1$, altså $T - T_o = Ce^{-kt}$. Fra $T(0) = T_0$ er $C = T_0 - T_o$:

$$T(t) = T_o + (T_0 - T_o)e^{-kt}$$

Det er den begrensede veksten fra forrige delkapittel, med grense T_o. ∎

EKSEMPEL *En annen separabel likning*
Løs $y' = xy$ med $y(0) = 2$, der $y > 0$.
Løsning
$\ln y = \frac{x^2}{2} + C_1$, så $y = Ce^{x^2/2}$. Fra $y(0) = C = 2$ får vi $y = 2e^{x^2/2}$. Kontroll: $y' = 2 \cdot xe^{x^2/2} = xy$. ∎

EKSEMPEL *Løse den logistiske likningen*
Løs $N' = kN\left(1 - \frac{N}{L}\right)$ med $0 < N < L$ og $N(0) = N_0$.
Løsning
Separasjon gir $\int \frac{1}{N(1 - N/L)}\,dN = \int k\,dt$. Delbrøkene gir

$$\int\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{L - N}\right)dN = \ln N - \ln(L - N) = \ln\frac{N}{L - N} = kt + C_1$$

Opphøyer vi med e: $\frac{N}{L - N} = Ce^{kt}$. Løser vi for N, får vi $N = \frac{LCe^{kt}}{1 + Ce^{kt}} = \frac{L}{1 + \frac{1}{C}e^{-kt}}$. Med $a = \frac{1}{C} = \frac{L - N_0}{N_0}$ er

$$N(t) = \frac{L}{1 + a\,e^{-kt}}$$

∎

4.59 Vis at $y = 4e^{3x}$ er en løsning av $y' = 3y$.

4.60 Løs $y' = 4x$ med $y(1) = 5$.

4.61 Løs $N' = 0{,}4\ N$ med $N(0) = 10$, og finn $N(5)$.

4.62 Løs $y' = -\,0{,}5\ y$ med $y(0) = 8$. Hva er halveringstiden?

4.63 Løs $y' = 0{,}1(50 - y)$ med $y(0) = 10$, og finn $y(10)$.

4.64 Løs $y' = 2xy$ med $y(0) = 1$, og finn $y(1)$.

4.65 Løs $y' = \frac{y}{x}$ for $x > 0$ med $y(1) = 3$.

4.66 Løs $y' = y^2$ med $y(0) = 1$, og forklar hva som skjer når x nærmer seg 1.

4.67 Løs $N' = 0{,}3\ N\left(1 - \frac{N}{200}\right)$ med $N(0) = 20$, og finn $N(10)$.

4.68 Bruk Eulers metode på $y' = 2y$ med $y(0) = 1$ og $h = 0{,}5$, og finn $y(1)$. Sammenlign med den eksakte e^2.

4.69 Bruk Eulers metode på $y' = x + y$ med $y(0) = 1$ og $h = 0{,}5$, og finn $y(1)$.

4.70 Hva blir utskriften?

Python

```
y, h = 100, 0.1
for i in range(3):
    y = y + h * (-y)
print(round(y, 1))
```

Hvilken differensiallikning løser programmet numerisk?

4.71 Hva blir utskriften?

Python

```
x, y, h = 0, 0, 0.5
for i in range(4):
    y = y + h * x
    x = x + h
print(y)
```

Hvilket integral anslår programmet?

4.72 Hvorfor har $y' = ky$ uendelig mange løsninger, og hva gjør en startverdi?

4.73 Vis at den logistiske likningen $N' = kN\left(1 - \frac{N}{L}\right)$ gir $N' = \frac{kL}{4}$ når $N = \frac{L}{2}$.

4.4.1 Harmoniske svingninger

EKSEMPEL *Kloss på fjær*
En kloss på 0,5 kg henger i ei fjær med $k = 50$ N/m. Finn ω, perioden og frekvensen.
Løsning
$\omega = \sqrt{\frac{50}{0{,}5}} = \sqrt{100} = 10$ rad/s. Perioden er $T = \frac{2\pi}{10} \approx 0{,}628$ s, og frekvensen er $f = \frac{1}{T} \approx 1{,}59$ Hz. ∎

EKSEMPEL *Startvilkår*
Klossen trekkes 0,1 m ned og slippes uten fart. Finn $x(t)$, største fart og største akselerasjon.
Løsning
$x(t) = 0{,}1\cos(10t)$ (med utslaget positivt nedover). Amplituden er $R = 0{,}1$ m. Største fart er $R\omega = 0{,}1 \cdot 10 = 1$ m/s, og største akselerasjon er $R\omega^2 = 0{,}1 \cdot 100 = 10$ m/s². ∎

EKSEMPEL *Med starthastighet*
For en svingning med $\omega = 6$ er $x(0) = 0{,}05$ m og $x'(0) = 0{,}3$ m/s. Finn $x(t)$, amplituden og skriv løsningen som $R\sin(\omega t + \varphi)$.
Løsning
$A = 0{,}05$ og $B = \frac{0{,}3}{6} = 0{,}05$. Da er $x(t) = 0{,}05\cos(6t) + 0{,}05\sin(6t)$. Amplituden er $R = 0{,}05\sqrt{2} \approx 0{,}0707$ m.

Skriver vi $x = R\sin(\omega t + \varphi)$, er $R\sin\varphi = A = 0{,}05$ og $R\cos\varphi = B = 0{,}05$ (siden $\sin(\omega t + \varphi) = \sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi$). Det gir $\varphi = \frac{\pi}{4}$, så

$$x(t) = 0{,}0707\sin\left(6t + \frac{\pi}{4}\right)$$

■

EKSEMPEL *Sekundpendel*

Hvor lang periode har et pendel på 1,00 m? Hvor langt må pendelet være for at perioden skal bli 2,00 s?

Løsning

$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}81}} \approx 2{,}01$ s. For $T = 2$ er $L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9{,}81 \cdot 4}{4\pi^2} \approx 0{,}994$ m, altså nesten en meter.

■

EKSEMPEL *Dempet svingning*

Utslaget er $x(t) = 0{,}1\,e^{-0{,}5\,t}\cos(10t)$. Etter hvor lang tid er amplituden halvert?

Løsning

$e^{-0{,}5\,t} = \frac{1}{2}$ gir $t = \frac{\ln 2}{0{,}5} \approx 1{,}39$ s. Etter 1,39 s er amplituden 0,05 m.

■

4.74 En kloss på 2 kg henger i ei fjær med $k = 200$ N/m. Finn ω, perioden og frekvensen.

4.75 En svingning har perioden 0,5 s. Finn ω, og fjærkonstanten k når massen er 0,4 kg.

4.76 Utslaget er $x(t) = 0{,}2\cos(5t)$ meter. Finn amplitude, periode, største fart og største akselerasjon.

4.77 En svingning har $\omega = 4$. Finn $x(t)$ når

a) $x(0) = 0{,}1$ og $x'(0) = 0$

b) $x(0) = 0{,}1$ og $x'(0) = 0{,}4$

4.78 Vis at $x(t) = 3\sin(2t)$ løser $x'' = -4x$.

4.79 Vis at $x(t) = 2\cos(3t) + \sin(3t)$ løser $x'' = -9x$.

4.80 Finn perioden til et pendel på 0,5 m, og hvor langt pendelet må være for at perioden skal bli 1 s.

4.81 På månen er $g = 1{,}62$ m/s². Hva er perioden til et pendel på 1 m der?

4.82 Utslaget er $x(t) = 0{,}2\,e^{-0{,}2\,t}\cos(8t)$. Finn amplituden etter 5 s, og når amplituden er halvert.

4.83 Hva skjer med perioden til en fjærsvingning hvis massen dobles?

4.84 En svingning har frekvens 2 Hz. Finn perioden og ω.

4.85 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import sqrt, pi
print(round(sqrt(50 / 0.5), 1), round(2*pi / 10,
3))
```

4.86 Hva blir utskriften?

Python

```
w, x, v, dt = 1, 1.0, 0.0, 0.5
for i in range(2):
    v = v - w**2 * x * dt
    x = x + v * dt
print(x)
```

Sammenlign med den eksakte løsningen $\cos 1 \approx 0{,}54$.

4.87 Vis at $v^2 + \omega^2x^2 = R^2\omega^2$ for $x = R\sin(\omega t + \varphi)$.

4.88 Forklar hvorfor perioden til en harmonisk svingning ikke avhenger av amplituden.

Fasit

4.1.1 Modeller og regresjon

4.1
f gir $1, 3, 5, 7$. Avvikene er $0{,}2$, $-0{,}2$, $0{,}3$ og $-0{,}1$. $\text{SSE} = 0{,}04 + 0{,}04 + 0{,}09 + 0{,}01 = 0{,}18$.

4.2
a) Eksponentiell: hver verdi er 2 ganger den forrige.
b) Lineær: økningen er 3 hver gang.
c) Kvadratisk: forskjellene $3, 5, 7, 9$ øker med 2 hver gang, så andre differanse er konstant. ($y = x^2$.)

4.3
Stigningstallet er $\dfrac{414{,}2 - 316{,}9}{60} \approx 1{,}622$. Modellen er $f(x) = 1{,}622\,x + 316{,}9$, og $f(70) \approx 430{,}4$.

4.4
$a = 50$. Fra $50b^5 = 80$ får vi $b^5 = 1{,}6$, så $b = 1{,}6^{1/5} \approx 1{,}099$. Veksten er omtrent 9,9 % per år.

4.5
200 er startverdien ($x = 0$), og 1,03 er vekstfaktoren: veksten er 3 % per år. $f(10) = 200 \cdot 1{,}03^{10} \approx 268{,}8$.

4.6
$1{,}05^x = 2$ gir $x = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}2$ år.

4.7
$f'(x) = -x + 4 = 0$ gir $x = 4$, og $f(4) = -8 + 16 + 1 = 9$. Toppunktet er $(4, 9)$: Bestanden når et maksimum på 9 etter 4 enheter tid, og avtar deretter.

4.8
En sinusmodell. Temperaturen gjentar seg hvert år, med en høyeste verdi om sommeren og en laveste om vinteren.

4.9
$R^2 = 1$ betyr $\text{SSE} = 0$: Alle punktene ligger på kurven. Modellen kan likevel være dårlig, for eksempel et polynom av høy grad som passer til tilfeldig støy, men gir dårlige spådommer.

4.10
2.0 2.0. Punktene ligger på linja $y = 2x + 2$.

4.11
3.0 2.0. Modellen er $y = 2 \cdot 3^x$.

4.12
$\sum x_i y_i = 2{,}1 + 7{,}8 + 18{,}6 = 28{,}5$ og $\sum x_i^2 = 14$. $a = \dfrac{28{,}5}{14} \approx 2{,}04$.

4.13
Mellom målepunktene vet vi at modellen følger dataene på begge sider. Utenfor har vi ingen data som kontrollerer modellen, og en kurve som passer godt innenfor, kan oppføre seg helt annerledes utenfor, for eksempel gå mot minus uendelig.

4.14
$\ln y = \ln a + x \ln b$. Det er lineær i x med stigningstall $\ln b$ og konstantledd $\ln a$. ■

4.15
$100b^2 = 121$ gir $b = 1{,}1$, altså 10 % per år.

4.1.2 Periodiske modeller

4.16
Amplitude 3, likevektslinje 10, periode $\dfrac{2\pi}{\pi/6} = 12$, største verdi 13, minste verdi 7.

4.17
$A = \sqrt{13} \approx 3{,}61$. Vinkelen er $\varphi = \arctan\dfrac{3}{2} \approx 0{,}983$ rad.

4.18
$a = b = 1$, så $A = \sqrt{2}$ og $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Altså $\sqrt{2}\sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

4.19
Største verdi er 14, når $\dfrac{\pi}{6}(m - 4) = \dfrac{\pi}{2}$, altså $m = 7$ (juli). Laveste verdi er -2, når $\dfrac{\pi}{6}(m - 4) = -\dfrac{\pi}{2}$, altså $m = 1$ (januar).

4.20
$T(4) = 8\sin 0 + 6 = 6$ grader. Den er på likevektslinja og stiger.

4.21
Største verdi er $12 + 6{,}14 = 18{,}14$ timer. Sinus er 1 når $\dfrac{2\pi}{365}t - 1{,}377 = \dfrac{\pi}{2}$, altså $t = \dfrac{365}{2\pi}\left(1{,}377 + \dfrac{\pi}{2}\right) \approx 171$ (omtrent 20. juni).

4.22
$D(t) = 12$ gir $\sin u = 0$ med $u = \dfrac{2\pi}{365}t - 1{,}377$. Da er $u = 0$ eller $u = \pi$, altså $t \approx 80$ og $t \approx 80 + 182{,}5 \approx 262$ (vår- og høstjevndøgn).

4.23
$D'_{\max} = A \cdot \dfrac{2\pi}{365} = 6{,}14 \cdot 0{,}01721 \approx 0{,}106$ timer per dag, omtrent 6,3 minutter.

4.24
Høyeste 12 grader klokka 15, laveste 4 grader klokka 3. $T = 10$ gir $\sin u = \dfrac{1}{2}$ med $u = \dfrac{\pi}{12}(t - 9)$, så $u = \dfrac{\pi}{6}$ eller $\dfrac{5\pi}{6}$, altså $t = 11$ eller $t = 19$.

4.25
Perioden må være i samme enhet som t. Her er t måneder, så perioden er 12.

4.26
2.0. Punktene ligger på $y = 2\cos x$, så $b = 2$.

4.27
5.0 0.927

4.28
Når c er kjent, er $\sin(ct)$ og $\cos(ct)$ kjente tall for hver måling. Modellen er da en sum av parametere (a, b og d) ganget med kjente tall, og det er en lineær modell.

4.29
$A = 1$, $d = 2$ og perioden er 12,4 timer, så $c = \dfrac{2\pi}{12{,}4}$. Klokka 9 : 06 er $t = 9{,}1$, en kvart periode (3,1 timer) etter høyvann: $h = 2 + \cos\dfrac{\pi}{2} = 2$ m.

4.30
En sinusmodell gjentar seg og går opp og ned mellom to faste verdier. En voksende befolkning har ikke dette mønsteret, så en lineær eller eksponentiell modell passer bedre.

4.2.1 Derivasjon og integrasjon i modeller

4.31
$P'(t) = 0{,}4\,t + 3$, så $P'(10) = 7$ tusen per år. Endringen er $P(10) - P(0) = (20 + 30 + 100) - 100 = 50$ tusen.

4.32
f' har enhet kg per uke. Integralet av f' er en samlet endring i kg: kg per uke ganger uker er kg.

4.33
$\int_0^{10} P\,dt = \left[\frac{0{,}2\,t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 100t\right]_0^{10} = \frac{200}{3} + 150 + 1000 \approx 1216{,}7.$
Gjennomsnittet er $\frac{1216{,}7}{10} \approx 121{,}7$ tusen.

4.34
$T'(t) = -t + 6 = 0$ gir $t = 6$, og $T(6) = -18 + 36 = 18$ grader. $T'(2) = 4$ grader per minutt.

4.35
Temperaturen er 0 både ved $t = 0$ og $t = 12$, og negativ utenfor. Modellen er rimelig for $0 \leqslant t \leqslant 12$.

4.36
$\int_0^{10}(12 - 2t)\,dt = \left[\,12t - t^2\right]_0^{10} = 120 - 100 = 20$ liter. Mengden er størst når $V' = 0$, altså $t = 6$, og økningen til da er $12 \cdot 6 - 36 = 36$ liter.

4.37
$\frac{s(4) - s(1)}{3} = \frac{24 - 3}{3} = 7$ m/s. $v(t) = 2t + 2 = 7$ gir $t = 2{,}5$.

4.38
Året har $12 \cdot 365 = 4380$ timer dagslys (sinusleddet bidrar 0 over en periode). $D'_{maks} = 3 \cdot \frac{2\pi}{365} \approx 0{,}052$ timer per dag, omtrent 3,1 minutter per dag.

4.39
$x = 0$: $\frac{2}{400} = 0{,}5\,\%$. $x = 100$: $\frac{2}{600} \approx 0{,}33\,\%$. Konstant økning gir minkende relativ vekst.

4.40
$f'(x) = 200 \cdot 1{,}05^x \ln 1{,}05$, så $f'(0) = 200 \ln 1{,}05 \approx 9{,}76$. Den relative veksten er $\ln 1{,}05 \approx 0{,}0488$, altså 4,88 % (litt mindre enn 5 %).

4.41
$B(x) = 0$ gir $x^2 - 12x - 8 = 0$, så $x = 6 + \sqrt{44} \approx 12{,}6$. Modellen gir positiv bestand for $0 \leqslant x < 12{,}6$ og er urimelig etter det.

4.42
12.0. Det er den deriverte av x^3 i $x = 2$: $3 \cdot 2^2 = 12$.

4.43
9.5. Det er trapessummen for $\int_0^3 x^2\,dx = 9$.

4.44
f' er endringsfarten, og integralet summerer de små endringene $f'(t)\,dt$ fra a til b. Ifølge analysens fundamentalteorem er summen lik den samlede endringen $f(b) - f(a)$.

4.3.1 Eksponentiell, begrenset og logistisk vekst

4.45
a) Eksponentiell (før næringen tar slutt).
b) Begrenset.
c) Logistisk.

4.46
$N(10) = 500e^{0{,}3} \approx 674{,}9$. Fordobling: $e^{0{,}03\,t} = 2$ gir $t = \frac{\ln 2}{0{,}03} \approx 23{,}1$.

4.47
$N(0) = 100$ og grensen er $L = 800$. $N(5) = 800 - 700e^{-1} \approx 542{,}5$. $N = 700$ gir $700e^{-0{,}2\,t} = 100$, så $e^{-0{,}2\,t} = \frac{1}{7}$ og $t = 5 \ln 7 \approx 9{,}73$.

4.48
$T(0) = 80$. $T(10) = 22 + 58e^{-0{,}8} \approx 48{,}1$. $T = 40$ gir $e^{-0{,}08\,t} = \frac{18}{58}$, så $t = -\frac{\ln(18/58)}{0{,}08} \approx 14{,}6$ minutter.

4.49
$N(0) = \frac{2000}{20} = 100$. $N(10) = \frac{2000}{1 + 19e^{-4}} \approx 1483{,}7$. $N = 1000$ gir $19e^{-0{,}4\,t} = 1$, så $t = \frac{\ln 19}{0{,}4} \approx 7{,}36$.

4.50
Største vekstfart er $\frac{kL}{4} = \frac{0{,}4 \cdot 2000}{4} = 200$ per tidsenhet. Den inntreffer når $N = \frac{L}{2} = 1000$, altså $t \approx 7{,}36$.

4.51
$a = \frac{L - N_0}{N_0} = \frac{480}{20} = 24$.

4.52
Før dette punktet øker vekstfarten, og etter det synker den. Vendepunktet er der vekstfarten er størst, det vil si der N' har sitt maksimum, og det er når $N = \frac{L}{2}$.

4.53
$z(2) = \ln\left(\frac{1200}{130} - 1\right) = \ln 8{,}23 \approx 2{,}108$ og $z(4) = \ln 3 \approx 1{,}099$. Stigningstallet er $\frac{1{,}099 - 2{,}108}{2} \approx -0{,}50$, så $k \approx 0{,}5$.

4.54
```
100
560
1484
```

4.55
Den eksponentielle gir $100e^8 \approx 298\,000$, mens den logistiske gir omtrent 1987 (nær grensen 2000). Eksponentiell vekst kan ikke fortsette for alltid, for plass og ressurser er begrenset.

4.56
$e^{-kt} \to 0$ for $k > 0$, så $T \to L$. For $t = 0$ er $e^0 = 1$, og $T(0) = L - (L - N_0) = N_0$. ■

4.57
Med e^{kt} i stedet for e^{-kt} vokser nevneren over alle grenser, så $N \to 0$. Bestanden synker mot 0 i stedet for å vokse mot L.

4.58
I begrenset vekst er veksten raskest i begynnelsen, og avtar jevnt mot grensen. I logistisk vekst er veksten sakte i begynnelsen, raskest når $N = \frac{L}{2}$ og avtar deretter.

4.3.2 Vekstmodeller og differensiallikninger

4.59
$y' = 12e^{3x} = 3 \cdot 4e^{3x} = 3y$. ■

4.60
Integrasjon gir $y = 2x^2 + C$. Fra $y(1) = 2 + C = 5$ får vi $C = 3$, så $y = 2x^2 + 3$.

4.61
$N(t) = 10e^{0{,}4\,t}$, så $N(5) = 10e^2 \approx 73{,}9$.

4.62
$y = 8e^{-0{,}5\,x}$. Halveringstiden finnes fra $e^{-0{,}5\,x} = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\ln 2}{0{,}5} \approx 1{,}39$.

4.63
$y(t) = 50 - 40e^{-0{,}1\,t}$, så $y(10) = 50 - 40e^{-1} \approx 35{,}3$.

4.64
Separasjon: $\ln y = x^2 + C_1$, så $y = Ce^{x^2}$. Med $y(0) = 1$ er $C = 1$, og $y(1) = e \approx 2{,}72$.

4.65

Separasjon: $\frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{x}\,dx$ gir $\ln y = \ln x + C_1$, så $y = Cx$. Med $y(1) = 3$ er $C = 3$ og $y = 3x$.

4.66

Separasjon: $\frac{1}{y^2}\,dy = dx$ gir $-\frac{1}{y} = x + C$. Med $y(0) = 1$ er $C = -1$, så $y = \frac{1}{1-x}$. Når $x \to 1$, går y mot uendelig. Løsningen eksisterer bare for $x < 1$.

4.67

$a = \frac{200-20}{20} = 9$, så $N(t) = \frac{200}{1+9e^{-0{,}3\,t}}$. $N(10) = \frac{200}{1+9e^{-3}} \approx 138{,}1$.

4.68

$y_1 = 1 + 0{,}5 \cdot 2 = 2$ og $y_2 = 2 + 0{,}5 \cdot 4 = 4$. Den eksakte verdien er $e^2 \approx 7{,}39$. Skrittet er for stort.

4.69

$y_1 = 1 + 0{,}5(0+1) = 1{,}5$ og $y_2 = 1{,}5 + 0{,}5(0{,}5+1{,}5) = 2{,}5$.

4.70

72.9. Programmet løser $y' = -y$ med $y(0) = 100$ og $h = 0{,}1$. Hvert skritt ganger med $0{,}9$.

4.71

1.5. Programmet anslår $y(2)$ for $y' = x$, $y(0) = 0$, altså $\int_0^2 x\,dx = 2$. Det er en venstresum.

4.72

Løsningene er $y = Ce^{kx}$ for alle konstanter C. En startverdi $y(0) = y_0$ gir $C = y_0$ og dermed én løsning.

4.73

$N' = k \cdot \frac{L}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{kL}{4}$. ■

4.4.1 Harmoniske svingninger

4.74

$\omega = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10$ rad/s. $T = \frac{2\pi}{10} \approx 0{,}628$ s og $f = \frac{1}{T} \approx 1{,}59$ Hz.

4.75

$\omega = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi \approx 12{,}57$ rad/s. Fra $\omega^2 = \frac{k}{m}$ er $k = m\omega^2 = 0{,}4 \cdot 16\pi^2 \approx 63{,}2$ N/m.

4.76

Amplitude 0,2 m. Periode $\frac{2\pi}{5} \approx 1{,}26$ s. Største fart $R\omega = 0{,}2 \cdot 5 = 1$ m/s. Største akselerasjon $R\omega^2 = 0{,}2 \cdot 25 = 5$ m/s².

4.77

a) $A = 0{,}1$, $B = 0$: $x(t) = 0{,}1\cos 4t$.

b) $A = 0{,}1$, $B = \frac{0{,}4}{4} = 0{,}1$: $x(t) = 0{,}1\cos 4t + 0{,}1\sin 4t$ med amplitude $0{,}1\sqrt{2} \approx 0{,}141$.

4.78

$x' = 6\cos 2t$ og $x'' = -12\sin 2t = -4 \cdot 3\sin 2t = -4x$. ■

4.79

$x' = -6\sin 3t + 3\cos 3t$ og $x'' = -18\cos 3t - 9\sin 3t = -9(2\cos 3t + \sin 3t) = -9x$. ■

4.80

$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}5}{9{,}81}} \approx 1{,}42$ s. For $T = 1$: $L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9{,}81}{4\pi^2} \approx 0{,}248$ m.

4.81

$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{1{,}62}} \approx 4{,}94$ s, mye lenger enn på jorda (2,01 s).

4.82

Amplituden er $0{,}2\,e^{-0{,}2\,t}$. Etter 5 s: $0{,}2\,e^{-1} \approx 0{,}0736$ m. Halvert: $e^{-0{,}2\,t} = \frac{1}{2}$ gir $t = \frac{\ln 2}{0{,}2} \approx 3{,}47$ s.

4.83

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, så perioden multipliseres med $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

4.84

$T = \frac{1}{2} = 0{,}5$ s og $\omega = 2\pi f = 4\pi \approx 12{,}57$ rad/s.

4.85

10.0 0.628. Det er $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ og perioden $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

4.86

0.3125. Simuleringen med to store skritt avviker mye fra 0,54. Mindre Δt gir bedre nøyaktighet.

4.87

$v = R\omega\cos(\omega t + \varphi)$, så $v^2 + \omega^2 x^2 = R^2\omega^2\cos^2(\ldots) + R^2\omega^2\sin^2(\ldots) = R^2\omega^2$. ■

4.88

Perioden $T = \frac{2\pi}{\omega}$ bestemmes av $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, som ikke inneholder amplituden. Større utslag gir større kraft og dermed større fart, så en runde tar like lang tid.