3 Trigonometri

OPPGAVEHEFTE · MATEMATIKK R2

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler. Fasiten står bakerst.

Formelark

RADIANER

Radian

$$v = \frac{b}{r}, \qquad 180^\circ = \pi \text{ rad}$$

Buelengde og sektorareal

$$b = rv, \qquad A = \frac{1}{2}r^2v$$

ENHETSSIRKELEN

Definisjon

$$P = (\cos v, \sin v), \quad \tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$$

Enhetsformelen

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

Eksakte verdier

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

LIKNINGER

$\sin x = a$

$x = \arcsin a + 2\pi n$ eller $\pi - \arcsin a + 2\pi n$

$\cos x = a$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n$$

$\tan x = a$

$$x = \arctan a + \pi n$$

IDENTITETER

Sum

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$$

Sum, cosinus

$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$

Dobbel vinkel

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

Harmonisk sum

$$a\sin x + b\cos x = R\sin(x + \varphi),\ R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

SINUSFUNKSJONER

Sinusfunksjon

$$f(x) = A\sin(cx + \varphi) + d$$

Periode og forskyvning

$$T = \frac{2\pi}{c}, \qquad x_0 = -\frac{\varphi}{c}$$

Fra topp og bunn

$$|A| = \frac{M - m}{2}, \quad d = \frac{M + m}{2}$$

DERIVASJON OG INTEGRASJON

Deriverte

$$(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x,\ (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Antideriverte

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

Kvadrater

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

3.1.1 Radianer

EKSEMPEL *Regne om*

Regn om

a) $45°$ til radianer

b) $\frac{3\pi}{4}$ til grader

c) 1 radian til grader

Løsning

a) $45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$

b) $\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 135°$

c) $1 \cdot \frac{180}{\pi} \approx 57{,}3°$

■

EKSEMPEL *Bue og sektor*

En sirkel har radius 6. Finn buelengden og sektorarealet for en vinkel på $\frac{\pi}{3}$.

Løsning

$$b = 6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi \approx 6{,}28, \qquad A = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \frac{\pi}{3} = 6\pi \approx 18{,}85$$

■

EKSEMPEL *Minuttviseren*

Minuttviseren på et ur er 12 cm lang. Hvor langt beveger spissen seg på 20 minutter?

Løsning

20 minutter er en tredjedel av en time, så vinkelen er $\frac{1}{3} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3}$. Spissen beveger seg

$$b = 12 \cdot \frac{2\pi}{3} = 8\pi \approx 25{,}1 \text{ cm}$$

■

3.1 Regn om til radianer. Svar med π.

a) $30°$

b) $90°$

c) $120°$

d) $225°$

3.2 Regn om til grader.

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{7\pi}{4}$

d) 2

3.3 En sirkel har radius 5. Finn buelengden for vinkelen

a) $\frac{\pi}{2}$

b) 2

c) $120°$

3.4 Finn sektorarealet i en sirkel med radius 4 for vinkelen

a) $\frac{\pi}{2}$

b) 1,5

c) $60°$

3.5 En bue i en sirkel med radius 3 har lengde 6. Hva er vinkelen i radianer, og i grader?

3.6 En sektor har radius 5 og areal 20. Finn vinkelen i radianer.

3.7 Et hjul har radius 30 cm. Hvor langt ruller det når det snurrer 2,5 runder?

3.8 Timeviseren på et ur er 8 cm lang. Hvor langt beveger spissen seg på 4 timer?

3.9 En pizza med radius 15 cm deles i 8 like store biter. Finn arealet av én bit og lengden av den ytre kanten på en bit.

3.10 Vis at buelengden i en sirkel med radius r for en vinkel på $v°$ er $\frac{\pi r v}{180}$.

3.11 Forklar hvorfor en radian er omtrent $57{,}3°$.

3.12 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import pi, degrees
print(round(degrees(pi), 1))
print(round(degrees(2), 1))
```

3.13 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import radians
print(round(radians(90), 3))
print(round(radians(180), 3))
```

3.14 Skriv et program som regner om $135°$ til radianer og skriver ut svaret avrundet til tre desimaler.

3.15 Hvorfor er $\sin 30$ på en kalkulator i radianmodus ikke 0,5?

3.2.1 Sinus, cosinus og tangens

EKSEMPEL *Verdier fra enhetssirkelen*

Finn

a) $\sin \frac{7\pi}{2}$

b) $\cos(-\pi)$

c) $\tan \pi$

Løsning

a) $\frac{7\pi}{2} = 2\pi + \frac{3\pi}{2}$, så $\sin \frac{7\pi}{2} = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$.

b) Å dreie $-\pi$ er en halv runde med klokka, og vi havner i $(-1, 0)$. Altså $\cos(-\pi) = -1$.

c) Ved $v = \pi$ er punktet $(-1, 0)$, så $\tan \pi = \frac{0}{-1} = 0$.

■

EKSEMPEL *Kvadrant og fortegn*

I hvilken kvadrant ligger vinkelen $v = 4$ radianer, og hva er fortegnet til $\sin 4$, $\cos 4$ og $\tan 4$?

Løsning

Siden $\pi \approx 3{,}14 < 4 < 4{,}71 \approx \frac{3\pi}{2}$, ligger vinkelen i tredje kvadrant. Der er $\sin 4 < 0$, $\cos 4 < 0$ og $\tan 4 > 0$. Kalkulatoren gir $\sin 4 \approx -0{,}757$, $\cos 4 \approx -0{,}654$ og $\tan 4 \approx 1{,}158$.

■

EKSEMPEL *Finn cosinus fra sinus*

Det er gitt at $\sin v = \frac{3}{5}$ og at v ligger i andre kvadrant. Finn $\cos v$ og $\tan v$.

Løsning

$\cos^2 v = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, så $\cos v = \pm\frac{4}{5}$. I andre kvadrant er cosinus negativ, så $\cos v = -\frac{4}{5}$. Da er

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$$

■

3.16 Finn

a) $\sin 0$

b) $\cos 0$

c) $\sin \pi$

d) $\cos \frac{\pi}{2}$

e) $\tan 0$

3.17 Finn

a) $\sin \frac{3\pi}{2}$

b) $\cos \frac{3\pi}{2}$

c) $\cos 2\pi$

d) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

3.18 Avgjør i hvilken kvadrant vinklene 2,5, 4 og 5,5 ligger, og hva som er fortegnet til sinus og cosinus.

3.19 Det er gitt at $\sin v = \frac{5}{13}$ og at v ligger i andre kvadrant. Finn $\cos v$ og $\tan v$.

3.20 Det er gitt at $\cos v = 0{,}6$ og at v ligger i fjerde kvadrant. Finn $\sin v$ og $\tan v$.

3.21 Det er gitt at $\tan v = \frac{3}{4}$ og at v ligger i tredje kvadrant. Finn $\sin v$ og $\cos v$.

3.22 Finn

a) $\sin \frac{9\pi}{2}$

b) $\cos(-7\pi)$

c) $\tan 5\pi$

3.23 Hvilke vinkler v mellom 0 og 2π oppfyller

a) $\cos v = 0$

b) $\sin v = 0$

3.24 Hvilke verdier kan $\sin v$ og $\cos v$ høyst og lavest ha, og for hvilke vinkler mellom 0 og 2π får $\sin v$ sin største og minste verdi?

3.25 Et pariserhjul har radius 10 m og sentrum 12 m over bakken. Høyden til en gondol er $h = 12 + 10\sin v$, der v er vinkelen fra «klokka tre». Finn høyden for $v = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π og $\frac{3\pi}{2}$.

3.26 Forklar hvorfor $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$.

3.27 Vis at $\tan(v + \pi) = \tan v$.

3.28 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import sin, cos, pi
print(round(sin(3*pi/2), 3))
print(round(cos(pi), 3))
```

3.29 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import sin, pi
for v in [0, pi/2, pi]:
    print(round(sin(v), 3))
```

3.30 Hvorfor kan ikke $\cos v = 2$ for noen vinkel v?

3.2.2 Eksakte verdier og symmetrier

EKSEMPEL *Andre kvadrant*

Finn $\sin \frac{5\pi}{6}$ og $\tan \frac{3\pi}{4}$.

Løsning

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\tan \frac{3\pi}{4} = \frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{\cos \frac{3\pi}{4}} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{-\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = -1.$$

■

EKSEMPEL *Tredje og fjerde kvadrant*

Finn $\cos \frac{7\pi}{6}$ og $\cos \frac{11\pi}{6}$.

Løsning

$$\cos \frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos \frac{11\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

■

EKSEMPEL *Negativ vinkel*

Finn $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ og $\sin \frac{7\pi}{4}$.

Løsning

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\sin \frac{7\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

■

3.31 Fyll ut tabellen med eksakte verdier uten å se på formelarket.

v	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin v$					
$\cos v$					

3.32 Finn de eksakte verdiene.

a) $\sin\frac{2\pi}{3}$

b) $\cos\frac{2\pi}{3}$

c) $\tan\frac{2\pi}{3}$

3.33 Finn de eksakte verdiene.

a) $\sin\frac{5\pi}{6}$

b) $\cos\frac{5\pi}{6}$

c) $\tan\frac{5\pi}{6}$

3.34 Finn de eksakte verdiene.

a) $\sin\frac{7\pi}{6}$

b) $\cos\frac{5\pi}{4}$

c) $\sin\frac{4\pi}{3}$

3.35 Finn de eksakte verdiene.

a) $\sin\frac{11\pi}{6}$

b) $\cos\frac{7\pi}{4}$

c) $\tan\frac{5\pi}{3}$

3.36 Finn de eksakte verdiene.

a) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

b) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

c) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

3.37 Finn de eksakte verdiene.

a) $\sin\frac{13\pi}{6}$

b) $\cos\frac{9\pi}{4}$

c) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

3.38 Regn ut uten kalkulator.

a) $\sin^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}$

b) $\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{6}$

c) $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}$

3.39 Bruk komplementvinkelformelen til å vise at $\sin\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{6}$.

3.40 Hvilke vinkler v mellom 0 og 2π har $\sin v=\frac{1}{2}$?

3.41 Hvilke vinkler v mellom 0 og 2π har $\cos v=-\frac{\sqrt{2}}{2}$?

3.42 Forklar hvorfor $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3.43 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import sin, cos, pi
print(round(sin(2*pi/3), 3))
print(round(cos(2*pi/3), 3))
```

3.44 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import tan, pi
print(round(tan(pi/4), 3))
print(round(tan(3*pi/4), 3))
```

3.45 Utled verdiene for $\sin\frac{\pi}{4}$ og $\cos\frac{\pi}{4}$ ved hjelp av en trekant.

3.3.1 Grunnlikningene

EKSEMPEL *sin x = 1/2*

Løs $\sin x=\frac{1}{2}$. Finn alle løsninger, og de som ligger i $[0,2\pi]$.

Løsning

$$x=\frac{\pi}{6}+2\pi n \qquad \text{eller} \qquad x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$$

I intervallet $[0,2\pi]$ (med $n=0$) er løsningene $x=\frac{\pi}{6}$ og $x=\frac{5\pi}{6}$.

■

EKSEMPEL *Pariserhjulet*

Når er gondolen 17 m over bakken i løpet av første runde, $0\leqslant v\leqslant 2\pi$?

Løsning

$12+10\sin v=17$ gir $\sin v=\frac{1}{2}$, og løsningene i første runde er $v=\frac{\pi}{6}$ og $v=\frac{5\pi}{6}$. Gondolen er 17 m over bakken en gang på vei opp og en gang på vei ned.

■

EKSEMPEL *Verdi som ikke er pen*

Løs $\sin x=0{,}3$ i intervallet $[0,2\pi]$.

Løsning

$x_1=\arcsin 0{,}3\approx 0{,}305$ og $x_2=\pi-0{,}305\approx 2{,}837$.

■

EKSEMPEL *Ingen løsning*

Løs $\sin x=2$.

Løsning

Sinus er en y-koordinat på enhetssirkelen og ligger mellom -1 og 1. Likningen har ingen løsning.

■

EKSEMPEL *cos x = -√2/2*

Løs $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $[0, 2\pi]$.

Løsning

Vinkelen $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$. Den andre løsningen er $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}$. I $[0, 2\pi]$ er løsningene $x = \frac{3\pi}{4}$ og $x = \frac{5\pi}{4}$.

■

EKSEMPEL *tan x = √3*

Løs $\tan x = \sqrt{3}$ i $[0, 2\pi]$.

Løsning

$x = \frac{\pi}{3} + \pi n$. I $[0, 2\pi]$ er løsningene $x = \frac{\pi}{3}$ og $x = \frac{4\pi}{3}$.

■

3.46 Løs likningene i intervallet $[0, 2\pi]$.

a) $\sin x = \frac{1}{2}$

b) $\cos x = \frac{1}{2}$

c) $\tan x = 1$

3.47 Løs likningene i intervallet $[0, 2\pi]$.

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x = -\frac{1}{2}$

c) $\tan x = -1$

3.48 Løs likningene i intervallet $[0, 2\pi]$.

a) $\sin x = 0$

b) $\cos x = 0$

c) $\sin x = 1$

3.49 Hvor mange løsninger har $\sin x = 1{,}2$? Begrunn.

3.50 Løs $\sin x = 0{,}7$ i $[0, 2\pi]$. Svar med tre desimaler.

3.51 Løs $\cos x = 0{,}25$ i $[0, 2\pi]$. Svar med tre desimaler.

3.52 Løs $\tan x = -3$ i $[0, 2\pi]$. Svar med tre desimaler.

3.53 Skriv den generelle løsningen av $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.54 Skriv den generelle løsningen av $\cos x = -1$.

3.55 Et pariserhjul har radius 8 m og sentrum 10 m over bakken. Høyden er $h = 10 + 8\sin v$. For hvilke vinkler v i første runde er $h = 14$?

3.56 Hvor mange løsninger har $\sin x = 0{,}3$ i intervallet $[0, 4\pi]$?

3.57 Hvorfor har $\tan x = a$ nøyaktig én løsning i hvert intervall av lengde π, for alle a?

3.58 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import acos, pi
x = acos(0.5)
print(round(x, 3))
print(round(2*pi - x, 3))
```

3.59 Skriv et program som finner begge løsningene av $\sin x = 0{,}3$ i $[0, 2\pi]$.

3.60 Vis at hvis x_1 løser $\sin x = a$, så løser også $\pi - x_1$ den samme likningen.

3.3.2 Sammensatte likninger

EKSEMPEL *sin 2x = 1/2*

Løs $\sin 2x = \frac{1}{2}$ i $[0, 2\pi]$.

Løsning

Fra $\sin u = \frac{1}{2}$ får vi $u = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ eller $u = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. Med $u = 2x$ blir

$$x = \frac{\pi}{12} + \pi n \qquad \text{eller} \qquad x = \frac{5\pi}{12} + \pi n$$

Periodeleddet er nå πn, ikke $2\pi n$. I $[0, 2\pi]$ (med $n = 0$ og $n = 1$) er løsningene

$$x = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$$

Det er fire løsninger, dobbelt så mange som for $\sin x = \frac{1}{2}$.

■

EKSEMPEL *cos(x − π/3) = 0*

Løs $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ i $[0, 2\pi]$.

Løsning

$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n$ gir $x = \frac{5\pi}{6} + \pi n$. I $[0, 2\pi]$ er løsningene $x = \frac{5\pi}{6}$ og $x = \frac{11\pi}{6}$.

■

EKSEMPEL *Andregrad i sin x*

Løs $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ i $[0, 2\pi]$.

Løsning

Med $u = \sin x$ får vi $2u^2 - u - 1 = 0$, som gir

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}, \qquad \text{altså} \quad u = 1 \quad \text{eller} \quad u = -\frac{1}{2}$$

Fra $\sin x = 1$ får vi $x = \frac{\pi}{2}$. Fra $\sin x = -\frac{1}{2}$ får vi $x = \frac{7\pi}{6}$ og $x = \frac{11\pi}{6}$.

Løsningene i $[0, 2\pi]$ er $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

■

EKSEMPEL *Bytte ut cos² med sin²*

Løs $2\cos^2 x + 3\sin x = 3$ i $[0, 2\pi]$.

Løsning

$2(1-\sin^2 x)+3\sin x = 3$ gir $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$. Med $u = \sin x$ er $2u^2 - 3u + 1 = (2u-1)(u-1) = 0$, så $u = \frac{1}{2}$ eller $u = 1$.

Fra $\sin x = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{6}$ og $x = \frac{5\pi}{6}$. Fra $\sin x = 1$: $x = \frac{\pi}{2}$.

Løsningene er $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$. ■

EKSEMPEL *sin x = cos x*

Løs $\sin x = \cos x$ i $[0, 2\pi]$.

Løsning

Der $\cos x = 0$ er $\sin x = \pm 1 \neq 0$, så ingen slike x er løsninger, og vi kan dele på $\cos x$: $\tan x = 1$.

Løsningene er $x = \frac{\pi}{4}$ og $x = \frac{5\pi}{4}$. ■

EKSEMPEL *Ikke del på sin x*

Løs $\sin x \cos x = \sin x$ i $[0, 2\pi]$.

Løsning

$\sin x \cos x - \sin x = 0$ gir $\sin x(\cos x - 1) = 0$. Da er $\sin x = 0$ eller $\cos x = 1$.

$\sin x = 0$ gir $x = 0$, π og 2π. $\cos x = 1$ gir $x = 0$ og $x = 2\pi$ (som allerede er med).

Løsningene er $x = 0, \pi, 2\pi$. Hadde vi delt på $\sin x$, ville vi mistet $x = 0$, π og 2π. ■

3.61 Løs $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $[0, \pi]$.

3.62 Løs $\cos 2x = \frac{1}{2}$ i $[0, \pi]$.

3.63 Løs $\tan 2x = 1$ i $[0, \pi]$.

3.64 Løs $\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ i $[0, 4\pi]$.

3.65 Løs $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $[0, 2\pi]$.

3.66 Løs $2\sin^2 x = 1$ i $[0, 2\pi]$.

3.67 Løs $\sin^2 x - \sin x = 0$ i $[0, 2\pi]$.

3.68 Løs $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ i $[0, 2\pi]$.

3.69 Løs $\sin^2 x = 1 + \cos x$ i $[0, 2\pi]$.

3.70 Løs $2\sin x \cos x = \cos x$ i $[0, 2\pi]$.

3.71 Løs $\tan x = 2\sin x$ i $[0, 2\pi]$.

3.72 Hva er perioden til $\sin 3x$? Hvor mange løsninger har $\sin 3x = 1$ i $[0, 2\pi]$?

3.73 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import sin, pi
x = pi / 12
print(round(sin(2*x), 3))
```

Hva er sammenhengen med likningen $\sin 2x = 0{,}5$?

3.74 Programmet bruker halveringsmetoden på $f(x) = \cos x - x$ i $[0, 1]$. Hva skriver det ut?

Python

```
from math import cos
f = lambda x: cos(x) - x
a, b = 0, 1
for i in range(40):
    m = (a + b) / 2
    if f(a) * f(m) <= 0:
        b = m
    else:
        a = m
print(round(a, 3))
```

3.75 Hvorfor er det galt å dele begge sider av $\sin x \cos x = \sin x$ på $\sin x$?

3.4.1 Sum- og differanseformlene

EKSEMPEL *Vinkelen 75°*

Finn den eksakte verdien av $\sin \frac{5\pi}{12}$.

Løsning

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{4}\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4}\sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Verdien er omtrent 0,966. ■

EKSEMPEL *Vinkelen 15°*

Finn den eksakte verdien av $\cos \frac{\pi}{12}$ og $\sin \frac{\pi}{12}$.

Løsning

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3}\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3}\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{3}\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3}\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Verdiene er omtrent 0,966 og 0,259. ■

EKSEMPEL *Fra sinus og cosinus til sum*

Det er gitt at $\sin u = \frac{3}{5}$ og $\cos v = \frac{5}{13}$, og at u og v ligger i første kvadrant. Finn $\cos(u+v)$ og $\sin(u+v)$.

Løsning

Fra enhetsformelen er $\cos u = \frac{4}{5}$ og $\sin v = \frac{12}{13}$ (begge positive i første kvadrant). Da er

$$\cos(u+v) = \cos u\cos v - \sin u \sin v = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} - \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} = \frac{20-36}{65} = -\frac{16}{65},$$

$$\sin(u+v) = \sin u\cos v + \cos u \sin v = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} + \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} = \frac{15+48}{65} = \frac{63}{65}$$

■

EKSEMPEL *Kvadrat av sum*

Vis at $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$.

Løsning

Vi starter med venstresiden:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2\sin x \cos x. \qquad \blacksquare$$

EKSEMPEL *Med tangens*

Vis at $\tan x + \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$ der alt er definert.

Løsning

$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}. \qquad \blacksquare$$

EKSEMPEL *Forskyvning med en kvart periode*

Bruk sumformelen til å vise at $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

Løsning

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \sin\frac{\pi}{2} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x. \qquad \blacksquare$$

Grafen til cosinus er altså grafen til sinus forskjøvet $\dfrac{\pi}{2}$ til venstre. $\blacksquare$

3.76 Finn de eksakte verdiene.

a) $\sin\dfrac{\pi}{12}$

b) $\cos\dfrac{7\pi}{12}$

3.77 Finn de eksakte verdiene.

a) $\cos\dfrac{5\pi}{12}$

b) $\sin\dfrac{7\pi}{12}$

3.78 Finn den eksakte verdien av $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

3.79 Det er gitt at $\sin u = \dfrac{4}{5}$ og $\cos v = \dfrac{12}{13}$, og at u og v ligger i første kvadrant. Finn $\sin(u+v)$ og $\cos(u+v)$.

3.80 Det er gitt at $\sin u = \dfrac{5}{13}$ med u i andre kvadrant, og at $\cos v = \dfrac{3}{5}$ med v i fjerde kvadrant. Finn $\cos(u-v)$.

3.81 Vis at $\sin(x+\pi) = -\sin x$.

3.82 Vis at $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin x$.

3.83 Vis at $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x$.

3.84 Vis at $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

3.85 Vis at $\sin(u+v) + \sin(u-v) = 2\sin u \cos v$.

3.86 Vis at $\cos(u+v) + \cos(u-v) = 2\cos u \cos v$.

3.87 Vis at $\left(1 - \cos^2 x\right)\left(1 + \tan^2 x\right) = \tan^2 x$.

3.88 Det er gitt at $\tan u = \dfrac{1}{2}$ og $\tan v = \dfrac{1}{3}$. Finn $\tan(u+v)$, og hva sier svaret om $u+v$ når begge vinklene er spisse?

3.89 Kari påstår at $\tan(u+v) = \tan u + \tan v$. Vis med $u = \dfrac{\pi}{4}$ og $v = \dfrac{\pi}{6}$ at det er galt.

3.90 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import cos, pi
print(round(cos(pi/3 - pi/4), 3))
```

Hvilken eksakt verdi er det?

3.4.2 Dobbel vinkel og harmonisk sum

EKSEMPEL *Fra sinus og cosinus til dobbel vinkel*

Det er gitt at $\sin x = \dfrac{3}{5}$ og $\cos x = \dfrac{4}{5}$. Finn $\sin 2x$ og $\cos 2x$.

Løsning

$$\sin 2x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}, \qquad \cos 2x = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

Kontroll: $\sin^2 2x + \cos^2 2x = \dfrac{576 + 49}{625} = 1$. $\blacksquare$

EKSEMPEL *Eksakt verdi*

Finn den eksakte verdien av $\cos\dfrac{\pi}{8}$.

Løsning

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

Siden $\dfrac{\pi}{8}$ ligger i første kvadrant, er cosinus positiv:

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \approx 0{,}924. \qquad \blacksquare$$

EKSEMPEL *Likning med dobbel vinkel*

Løs $\sin 2x = \sin x$ i $[0, 2\pi]$.

Løsning

$2\sin x \cos x - \sin x = 0$ gir $\sin x(2\cos x - 1) = 0$. Da er $\sin x = 0$, som gir $x = 0$, π og 2π, eller $\cos x = \dfrac{1}{2}$, som gir $x = \dfrac{\pi}{3}$ og $x = \dfrac{5\pi}{3}$.

Løsningene er $x = 0, \dfrac{\pi}{3}, \pi, \dfrac{5\pi}{3}, 2\pi$. $\blacksquare$

EKSEMPEL *cos 2x = sin x*

Løs $\cos 2x = \sin x$ i $[0, 2\pi]$.

Løsning

$1 - 2\sin^2 x = \sin x$ gir $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Med $u = \sin x$ er $u = \dfrac{-1 \pm 3}{4}$, altså $u = \dfrac{1}{2}$ eller $u = -1$.

Da er $x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$ (fra $\sin x = \dfrac{1}{2}$) og $x = \dfrac{3\pi}{2}$ (fra $\sin x = -1$). $\blacksquare$

EKSEMPEL *Tre sinus pluss fire cosinus*

Skriv $3\sin x + 4\cos x$ som $R\sin(x+\varphi)$, og finn største verdi.

Løsning

$R = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. Vinkelen har $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ og $\sin\varphi = \frac{4}{5}$, begge positive, så $\varphi = \arctan\frac{4}{3} \approx 0{,}927$. Altså

$$3\sin x + 4\cos x = 5\sin(x+0{,}927)$$

Største verdi er $R = 5$, og den inntreffer når $x + 0{,}927 = \frac{\pi}{2}$, altså $x \approx 0{,}644$. ∎

EKSEMPEL *Eksakt vinkel*

Skriv $\sqrt{3}\sin x - \cos x$ som $R\sin(x+\varphi)$.

Løsning

$R = \sqrt{3+1} = 2$. Vinkelen har $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ og $\sin\varphi = -\frac{1}{2}$, som er $\varphi = -\frac{\pi}{6}$. Altså $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. ∎

EKSEMPEL *Løse en likning*

Løs $\sin x + \cos x = 1$ i $[0, 2\pi]$.

Løsning

Her er $a = b = 1$, $R = \sqrt{2}$ og $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Likningen blir $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, altså $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Da er $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ eller $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, så $x = 2\pi n$ eller $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

I $[0, 2\pi]$ er løsningene $x = 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$. ∎

3.91 Det er gitt at $\sin x = \frac{5}{13}$ og at x ligger i første kvadrant. Finn $\sin 2x$, $\cos 2x$ og $\tan 2x$.

3.92 Regn ut uten kalkulator.

a) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$

b) $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$

c) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}$

3.93 Finn de eksakte verdiene av $\cos\frac{\pi}{8}$ og $\sin\frac{\pi}{8}$.

3.94 Vis at $\frac{\sin 2x}{2\sin x} = \cos x$ for $\sin x \neq 0$.

3.95 Vis at $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \tan x$ der alt er definert.

3.96 Vis at $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.

3.97 Løs $\sin 2x = \cos x$ i $[0, 2\pi]$.

3.98 Løs $\cos 2x + \cos x = 0$ i $[0, 2\pi]$.

3.99 Løs $\cos 2x = 1 - \sin x$ i $[0, 2\pi]$.

3.100 Skriv $\sin x + \sqrt{3}\cos x$ som $R\sin(x+\varphi)$.

3.101 Skriv $\cos x - \sin x$ som $R\sin(x+\varphi)$.

3.102 Finn største og minste verdi til $f(x) = 5\sin x + 12\cos x$.

3.103 Løs $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$ i $[0, 2\pi]$.

3.104 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import sqrt, atan2, pi
a, b = 1, 1
print(round(sqrt(a**2 + b**2), 3))
print(round(atan2(b, a), 3))
```

3.105 Hvorfor er $\cos 2x$ lik tre ulike uttrykk? Vis at de er like.

3.5.1 Grafene til sinus, cosinus og tangens

EKSEMPEL *Fortegn til cosinus*

For hvilke x i $[0, 2\pi]$ er $\cos x < 0$?

Løsning

Cosinus er 0 i $x = \frac{\pi}{2}$ og $x = \frac{3\pi}{2}$, og negativ mellom dem. Så $\cos x < 0$ for $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$. Det stemmer med enhetssirkelen: Cosinus er negativ i andre og tredje kvadrant. ∎

EKSEMPEL *Ulikhet med sinus*

Løs $\sin x > \frac{1}{2}$ i $[0, 2\pi]$.

Løsning

Likningen $\sin x = \frac{1}{2}$ har løsningene $x = \frac{\pi}{6}$ og $x = \frac{5\pi}{6}$. Mellom dem ligger grafen til $\sin x$ over linja $y = \frac{1}{2}$ (toppunktet i $\frac{\pi}{2}$ ligger mellom). Derfor er

$$\sin x > \frac{1}{2} \quad \text{for} \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$$

∎

EKSEMPEL *Antall løsninger fra grafen*

Hvor mange løsninger har $\sin x = 0$ i $[0, 4\pi]$, og hvor mange topp- og bunnpunkter har sinus der?

Løsning

Nullpunktene i $[0, 4\pi]$ er 0, π, 2π, 3π og 4π, altså 5. Toppunktene er $\frac{\pi}{2}$ og $\frac{5\pi}{2}$ (2 stykker), og bunnpunktene er $\frac{3\pi}{2}$ og $\frac{7\pi}{2}$ (2 stykker). ∎

3.106 Fyll ut uten å se på formelarket.

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
Periode			
Nullpunkter			
Verdimengde			

3.107 Hvor mange nullpunkter har $\cos x$ i $[0, 4\pi]$? Skriv dem opp.

3.108 Hvor mange løsninger har $\sin x = 1$ i $[0, 6\pi]$?

3.109 Løs ulikhetene i $[0, 2\pi]$.

a) $\sin x > 0$

b) $\cos x \geqslant 0$

3.110 Løs $\sin x > \frac{1}{2}$ i $[0, 2\pi]$.

3.111 Løs $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $[0, 2\pi]$.

3.112 Løs $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $[0, 2\pi]$.

3.113 Løs $\tan x < 1$ i $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

3.114 Finn verdimengden til

a) $f(x) = 2\sin x + 1$

b) $g(x) = \cos x - 3$

c) $h(x) = 5\cos x$

3.115 Hvor mange løsninger har $\sin x = \cos x$ i $[0, 4\pi]$? Finn dem.

3.116 Sinus er en odde funksjon. Bruk det til å finne $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ og $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

3.117 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import sin, cos, pi
print(round(sin(pi/2), 3), round(cos(pi), 3))
```

3.118 Programmet teller fortegnsskifter. Hva skriver det ut?

Python

```
from math import cos
n = 0
for i in range(1, 63):
    if cos(i*0.1) * cos((i+1)*0.1) < 0:
        n = n + 1
print(n)
```

3.119 Forklar hvorfor grafen til $\tan x$ har loddrette asymptoter i $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

3.120 Forklar hvorfor $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ betyr at cosinusgrafen er sinusgrafen forskjøvet.

3.5.2 Sinusfunksjoner

EKSEMPEL *Lese av parametere*

Funksjonen er $f(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$. Finn amplitude, periode, likevektslinje, faseforskyvning, og største og minste verdi.

Løsning

Amplituden er 3. Perioden er $\frac{2\pi}{2} = \pi$. Likevektslinja er $y = 1$. Siden $2x - \frac{\pi}{3} = 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, er grafen til $3\sin 2x + 1$ forskjøvet $\frac{\pi}{6}$ mot høyre. Største verdi er $1 + 3 = 4$ og minste verdi er $1 - 3 = -2$.

Det første toppunktet kommer en kvart periode etter forskyvningen, i $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$. ■

EKSEMPEL *Temperatur gjennom døgnet*

Temperaturen en sommerdag er høyest, 15 grader, klokka 15, og lavest, 5 grader, klokka 3. Lag en modell $T(t) = A\sin(c(t - t_0)) + d$, der t er timer etter midnatt.

Løsning

Amplituden er $A = \frac{15 - 5}{2} = 5$ og likevektslinja er $d = \frac{15 + 5}{2} = 10$. Perioden er 24 timer, så $c = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$.

Toppunktet er klokka 15. Det skal være en kvart periode (6 timer) etter forskyvningen t_0, så $t_0 = 15 - 6 = 9$. Modellen er

$$T(t) = 5\sin\left(\frac{\pi}{12}(t - 9)\right) + 10$$

Kontroll: $T(15) = 5\sin\frac{\pi}{2} + 10 = 15$ og $T(3) = 5\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 10 = 5$. ■

EKSEMPEL *Når er det 12 grader?*

Bruk modellen $T(t) = 5\sin\left(\frac{\pi}{12}(t - 9)\right) + 10$. Når er temperaturen 12 grader i løpet av døgnet?

Løsning

Sett $u = \frac{\pi}{12}(t - 9)$. Fra $\sin u = 0{,}4$ får vi $u = \arcsin 0{,}4 \approx 0{,}4115$ eller $u = \pi - 0{,}4115 \approx 2{,}7301$ (pluss $2\pi n$). Da er $t = 9 + \frac{12}{\pi}u$:

$$t \approx 9 + \frac{12}{\pi} \cdot 0{,}4115 \approx 10{,}57 \quad \text{og} \quad t \approx 9 + \frac{12}{\pi} \cdot 2{,}7301 \approx 19{,}43$$

De andre løsningene (u minus 2π) gir t utenfor døgnet. Temperaturen er altså 12 grader klokka 10 : 34 (på vei opp) og klokka 19 : 26 (på vei ned). ■

EKSEMPEL *Fra et topp- og et bunnpunkt*

Grafen til en sinusfunksjon har et toppunkt i $(2, 7)$ og det nærmeste bunnpunktet i $(8, 1)$. Finn funksjonen.

Løsning

Største verdi er 7 og minste er 1, så $A = 3$ og $d = 4$. En halv periode er $8 - 2 = 6$, så perioden er 12 og $c = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$. Det første toppunktet kommer en kvart periode (3) etter forskyvningen, så $x_0 = 2 - 3 = -1$:

$$f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}(x + 1)\right) + 4$$

Kontroll: $f(2) = 3\sin\frac{\pi}{2} + 4 = 7$ og $f(8) = 3\sin\frac{3\pi}{2} + 4 = 1$.

3.121 Les av amplitude, periode, likevektslinje, største og minste verdi for $f(x) = 4\sin\frac{x}{2} + 3$.

3.122 Skriv $f(x) = 2\sin(3x - \pi)$ på formen $2\sin(c(x - x_0))$ og finn perioden og forskyvningen.

3.123 Gitt $g(x) = -3\sin x + 2$. Finn amplitude, største og minste verdi, og $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3.124 En sinusfunksjon har største verdi 10 og minste verdi -2. Finn amplituden og likevektslinja.

3.125 En sinusfunksjon har største verdi 5, minste verdi -1 og periode π, og går gjennom $(0, 2)$ med stigende graf. Finn funksjonen.

3.126 Grafen til en sinusfunksjon har toppunkt i $(1, 9)$ og nærmeste bunnpunkt i $(5, 3)$. Finn funksjonen.

3.127 Daglengden i Oslo kan modelleres som $D(t) = 12 + 6\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right)$ timer, der t er dag nummer i året. Finn lengste og korteste dag, og omtrent hvilken dag den lengste er.

3.128 Temperaturen er $T(t) = 8\sin\left(\frac{\pi}{12}(t - 10)\right) + 12$. Finn $T(10)$ og når temperaturen er 16 grader.

3.129 Et pendel svinger slik at utslaget er $h(t) = 0{,}2\cos\left(\frac{2\pi t}{1{,}5}\right)$ meter. Finn amplitude og periode, og $h(0{,}75)$.

3.130 Beskriv hvordan grafen til $2\sin x$ endres til grafen til $2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$.

3.131 Løs $2\sin 2x + 1 = 2$ i $[0, \pi]$.

3.132 Kari sier at perioden til $\sin 3x$ er 3. Hva er galt?

3.133 Programmet beregner parametere fra data. Hva skriver det ut?

Python

```
data = [2, 5, 9, 6, 3]
A = (max(data) - min(data)) / 2
d = (max(data) + min(data)) / 2
print(A, d)
```

3.134 Vis at $A\cos(cx) = A\sin\left(cx + \frac{\pi}{2}\right)$.

3.135 Skriv et program som regner ut $T(t) = 5\sin\left(\frac{\pi}{12}(t - 9)\right) + 10$ for $t = 0, 3, 6, \ldots, 21$ og skriver ut den største verdien.

3.6.1 Derivasjon av trigonometriske funksjoner

EKSEMPEL *Kjerneregelen*

Deriver

a) $f(x) = \sin(3x)$

b) $g(x) = \cos(2x + 1)$

c) $h(x) = \sin^2 x$

d) $k(x) = e^{\sin x}$

Løsning

a) $f'(x) = 3\cos(3x)$

b) $g'(x) = -2\sin(2x + 1)$

c) $h(x) = (\sin x)^2$, så $h'(x) = 2\sin x \cdot \cos x$. (Det er også $\sin 2x$.)

d) $k'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$

EKSEMPEL *Produktregelen*

Deriver $f(x) = x\sin x$, og finn $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Løsning

$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x\cos x$. For $x = \frac{\pi}{2}$ er $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 1$.

EKSEMPEL *Tangent til sinus*

Finn likningen for tangenten til grafen til $f(x) = \sin x$ i $x = \frac{\pi}{3}$.

Løsning

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ og $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Tangenten er

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

EKSEMPEL *Topp og bunn*

Finn topp- og bunnpunktene til $f(x) = \sin x + \cos x$ i $[0, 2\pi]$.

Løsning

$f'(x) = \cos x - \sin x = 0$ gir $\tan x = 1$, altså $x = \frac{\pi}{4}$ og $x = \frac{5\pi}{4}$. Funksjonsverdiene er $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ og $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$. Fortegnet til f' skifter fra $+$ til $-$ i $\frac{\pi}{4}$ og fra $-$ til $+$ i $\frac{5\pi}{4}$, så toppunktet er $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ og bunnpunktet er $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

EKSEMPEL *Størst endringsfart*

Temperaturen er $T(t) = 5\sin\left(\frac{\pi}{12}(t - 9)\right) + 10$. Hvor fort stiger temperaturen klokka 9, og når stiger den raskest?

Løsning
$T'(t) = 5 \cdot \frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12}(t-9)\right) = \frac{5\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12}(t-9)\right)$.
Klokka 9 er $T'(9) = \frac{5\pi}{12}\cos 0 = \frac{5\pi}{12} \approx 1{,}31$ grader per time. Siden cos er størst (1) når argumentet er 0, stiger temperaturen raskest klokka 9, akkurat når temperaturen går gjennom likevektslinja på 10 grader.

3.136 Deriver

a) $f(x) = 4\sin x + \cos x$

b) $g(x) = \sin(5x)$

c) $h(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

d) $k(x) = \tan(2x)$

3.137 Deriver

a) $f(x) = \sin^2 x$

b) $g(x) = \cos^3 x$

c) $h(x) = \sin(x^2)$

3.138 Deriver

a) $f(x) = x\cos x$

b) $g(x) = e^x \sin x$

c) $h(x) = \frac{\sin x}{x}$

3.139 Finn $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ når $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$.

3.140 Finn likningen for tangenten til $f(x) = \cos x$ i $x = \frac{\pi}{3}$.

3.141 Finn topp- og bunnpunktene til $f(x) = 2\sin x - 1$ i $[0, 2\pi]$ ved å derivere.

3.142 Finn topp- og bunnpunktene til $f(x) = \sin x + \cos x$ i $[0, 2\pi]$.

3.143 Finn topp- og bunnpunktene til $f(x) = x + 2\cos x$ i $[0, 2\pi]$.

3.144 Temperaturen er $T(t) = 6\sin\left(\frac{\pi}{12}(t-8)\right) + 14$. Finn $T'(t)$ og hvor fort temperaturen stiger klokka 8.

3.145 Hva er det største stigningstallet grafen til $f(x) = \sin x$ kan ha, og hvor har den det?

3.146 Vis at $(\cos x)' = -\sin x$ ved å bruke $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ og kjerneregelen.

3.147 Deriver $\sin 2x$ på to måter: med kjerneregelen, og ved å bruke $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ og produktregelen. Vis at svarene er like.

3.148 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import cos
h = 0.001
d = (cos(0.5 + h) - cos(0.5 - h)) / (2*h)
print(round(d, 3))
```

Hvilken eksakt verdi er det omtrent?

3.6.2 Integrasjon av trigonometriske funksjoner

EKSEMPEL *Bestemte integraler*

Regn ut

a) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$

b) $\int_0^{\pi/2} \cos 2x\,dx$

c) $\int_0^{\pi/3} 3\cos x\,dx$

Løsning

a) $\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$

b) $\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sin\pi}{2} - \frac{\sin 0}{2} = 0$

c) $\left[3\sin x\right]_0^{\pi/3} = 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}60$

EKSEMPEL *Areal og gjennomsnitt*

Finn arealet under én bue av sinusgrafen, og gjennomsnittsverdien til $\sin x$ på $[0, \pi]$.

Løsning

Arealet er $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2$. Gjennomsnittsverdien er $\frac{1}{\pi} \cdot 2 = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}64$.

EKSEMPEL *Integralet av $\sin^2 x$*

Regn ut $\int \sin^2 x\,dx$ og $\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$.

Løsning

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

Bestemt integral: $\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$.

EKSEMPEL *Substitusjon*

Regn ut

a) $\int \sin x\cos x\,dx$

b) $\int_0^{\pi/2} \cos x\, e^{\sin x}\,dx$

c) $\int \tan x\,dx$

Løsning

a) Med $u = \sin x$ er $du = \cos x\,dx$: $\int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C$.

b) Med $u = \sin x$ er grensene 0 og 1: $\int_0^1 e^u\,du = e - 1 \approx 1{,}72$.

c) $\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$ med $u = \cos x$ og $du = -\sin x\,dx$ gir $-\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|\cos x| + C$.

■

EKSEMPEL *Delvis integrasjon*

Regn ut $\int x \sin x\,dx$ og $\int_0^{\pi} x \sin x\,dx$.

Løsning

$$\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

Bestemt: $\left[-x\cos x + \sin x\right]_0^{\pi} = (\pi + 0) - (0 + 0) = \pi$.

■

EKSEMPEL *Areal mellom sinus og cosinus*

Finn arealet av området mellom grafene til $\sin x$ og $\cos x$ fra $x = \frac{\pi}{4}$ til $x = \frac{5\pi}{4}$.

Løsning

$$A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)dx = \left[-\cos x - \sin x\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$$

Her er $-\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $-\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$.

■

EKSEMPEL *Volum*

Én bue av sinusgrafen, $y = \sin x$ for $0 \leqslant x \leqslant \pi$, dreies rundt x-aksen. Finn volumet.

Løsning

$$V = \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2} \approx 4{,}93$$

■

3.149 Finn

a) $\int (3\cos x - 2\sin x)dx$

b) $\int \sin 4x\,dx$

c) $\int \cos\frac{x}{2}\,dx$

3.150 Regn ut

a) $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$

b) $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$

c) $\int_0^{\pi/6} \cos x\,dx$

3.151 Regn ut

a) $\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\,dx$

b) $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

3.152 Regn ut

a) $\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$

b) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$

3.153 Finn

a) $\int \sin x \cos x\,dx$

b) $\int \cos x \sin^3 x\,dx$

3.154 Regn ut $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$.

3.155 Finn $\int x\cos x\,dx$ og regn ut $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$.

3.156 Finn arealet mellom grafen til $2\sin x$ og x-aksen fra 0 til π.

3.157 Finn arealet mellom grafen til $\sin x$ og x-aksen fra 0 til 2π.

3.158 Finn gjennomsnittsverdien til $\cos x$ på $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3.159 Grafen til $y = \cos x$ for $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ dreies rundt x-aksen. Finn volumet.

3.160 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import sin, pi
F = lambda x: sin(x)
print(round(F(pi/2) - F(0), 3))
```

Hvilket integral er det?

3.161 Vis at $\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$.

3.162 Hvorfor er gjennomsnittsverdien til $\sin^2 x$ over en periode lik $\frac{1}{2}$?

Fasit

3.1.1 Radianer

3.1

a) $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{2}$

c) $\frac{2\pi}{3}$

d) $\frac{5\pi}{4}$

3.2

a) $60°$

b) $150°$

c) $315°$

d) $2 \cdot \frac{180}{\pi} \approx 114{,}6°$

3.3

a) $5 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \approx 7{,}85$

b) $5 \cdot 2 = 10$

c) $120° = \frac{2\pi}{3}$, så $b = \frac{10\pi}{3} \approx 10{,}47$

3.4

a) $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi \approx 12{,}57$

b) $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 1{,}5 = 12$

c) $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} \approx 8{,}38$

3.5

$v = \frac{b}{r} = \frac{6}{3} = 2$ rad $\approx 114{,}6°$.

3.6

$20 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot v$ gir $v = \frac{40}{25} = 1{,}6$ rad.

3.7

Vinkelen er $2{,}5 \cdot 2\pi = 5\pi$, så $b = 30 \cdot 5\pi = 150\pi \approx 471$ cm. (Eller $2{,}5 \cdot 2\pi \cdot 30$.)

3.8

4 timer er $\frac{1}{3}$ av en runde (12 timer), så vinkelen er $\frac{2\pi}{3}$. $b = 8 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{16\pi}{3} \approx 16{,}8$ cm.

3.9

Vinkelen er $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. Arealet er $\frac{1}{2} \cdot 225 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{225\pi}{8} \approx 88{,}4$ cm². Kanten er $15 \cdot \frac{\pi}{4} \approx 11{,}8$ cm.

3.10

Vinkelen i radianer er $v \cdot \frac{\pi}{180}$.

Buelengden er $b = r \cdot v \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi r v}{180}$. ■

3.11

En halv runde er π radianer og $180°$.

Én radian er $\frac{180}{\pi} \approx 57{,}3°$.

3.12

```
180.0
114.6
```

3.13

```
1.571
3.142
```

Det er $\frac{\pi}{2}$ og π.

3.14

```
from math import radians
print(round(radians(135), 3))
```

Utskriften er 2,356, som er $\frac{3\pi}{4}$.

3.15

Kalkulatoren regner 30 som 30 radianer, og det er ikke $30°$. Riktig er $\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5$, eller skriv $30°$ i gradmodus.

3.2.1 Sinus, cosinus og tangens

3.16

a) 0

b) 1

c) 0

d) 0

e) 0

3.17

a) -1

b) 0

c) 1

d) -1

3.18

2,5 ligger mellom $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ og $\pi \approx 3{,}14$: andre kvadrant, $\sin > 0$ og $\cos < 0$. 4 ligger mellom π og $\frac{3\pi}{2} \approx 4{,}71$: tredje kvadrant, begge negative. 5,5 ligger mellom 4,71 og 6,28: fjerde kvadrant, $\sin < 0$ og $\cos > 0$.

3.19

$\cos^2 v = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$, så $\cos v = -\frac{12}{13}$ (andre kvadrant), og $\tan v = \frac{5/13}{-12/13} = -\frac{5}{12}$.

3.20

$\sin^2 v = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$, så $\sin v = -0{,}8$ (fjerde kvadrant), og $\tan v = \frac{-0{,}8}{0{,}6} = -\frac{4}{3}$.

3.21

Siden $\tan v = \frac{3}{4}$, kan vi bruke en 3-4-5-trekant: $\sin v = \pm\frac{3}{5}$ og $\cos v = \pm\frac{4}{5}$. I tredje kvadrant er begge negative: $\sin v = -\frac{3}{5}$ og $\cos v = -\frac{4}{5}$.

3.22

a) $\frac{9\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi}{2}$, så $\sin\frac{9\pi}{2} = 1$.

b) $\cos(-7\pi) = \cos 7\pi = \cos\pi = -1$.

c) $\tan 5\pi = \tan\pi = 0$.

3.23

a) $v = \frac{\pi}{2}$ og $v = \frac{3\pi}{2}$

b) $v = 0$, $v = \pi$ og $v = 2\pi$

3.24

Begge ligger mellom -1 og 1. $\sin v$ har største verdi 1 ved $v = \frac{\pi}{2}$ og minste verdi -1 ved $v = \frac{3\pi}{2}$.

3.25

$h(0) = 12$, $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 22$, $h(\pi) = 12$ og $h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$ meter.

3.26

Punktet $(\cos v, \sin v)$ ligger på enhetssirkelen, som har likningen $x^2 + y^2 = 1$. Setter vi inn $x = \cos v$ og $y = \sin v$, får vi $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$.

3.27

Å dreie en halv runde ekstra gir det motsatte punktet på sirkelen: $\sin(v + \pi) = -\sin v$ og $\cos(v + \pi) = -\cos v$.

Da er $\tan(v + \pi) = \frac{-\sin v}{-\cos v} = \tan v$. ■

3.28

```
-1.0
-1.0
```

3.29

```
0.0
1.0
0.0
```

3.30

$\cos v$ er x-koordinaten til et punkt på enhetssirkelen, og x ligger mellom -1 og 1. Verdien 2 er utenfor.

3.2.2 Eksakte verdier og symmetrier

3.31

$\sin v$: 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1. $\cos v$: 1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0.

3.32

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $-\frac{1}{2}$

c) $-\sqrt{3}$

3.33

a) $\frac{1}{2}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3.34

a) $-\frac{1}{2}$

b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.35

a) $-\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $-\sqrt{3}$

3.36

a) $-\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}$

c) -1

3.37

a) $\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$, så $\frac{1}{2}$

b) $\frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$, så $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $-\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

3.38

a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

3.39

$\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$. Begge er $\frac{\sqrt{3}}{2}$. ■

3.40

Referansevinkelen er $\frac{\pi}{6}$. Sinus er positiv i første og andre kvadrant: $v = \frac{\pi}{6}$ og $v = \frac{5\pi}{6}$.

3.41

Referansevinkelen er $\frac{\pi}{4}$. Cosinus er negativ i andre og tredje kvadrant: $v = \frac{3\pi}{4}$ og $v = \frac{5\pi}{4}$.

3.42

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3.43

```
0.866
-0.5
```

3.44

```
1.0
-1.0
```

3.45

En likebeint, rettvinklet trekant med katetene 1 har hypotenus $\sqrt{2}$. Vinkelen $\frac{\pi}{4}$ har motstående og hosliggende katet 1, så $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.3.1 Grunnlikningene

3.46

a) $x = \frac{\pi}{6}$ eller $x = \frac{5\pi}{6}$

b) $x = \frac{\pi}{3}$ eller $x = \frac{5\pi}{3}$

c) $x = \frac{\pi}{4}$ eller $x = \frac{5\pi}{4}$

3.47

a) $x = \frac{4\pi}{3}$ eller $x = \frac{5\pi}{3}$

b) $x = \frac{2\pi}{3}$ eller $x = \frac{4\pi}{3}$

c) $x = \frac{3\pi}{4}$ eller $x = \frac{7\pi}{4}$

3.48

a) $x = 0$, π eller 2π

b) $x = \frac{\pi}{2}$ eller $\frac{3\pi}{2}$

c) $x = \frac{\pi}{2}$

3.49

Ingen. Sinus ligger mellom -1 og 1.

3.50

$x_1 = \arcsin 0{,}7 \approx 0{,}775$ og $x_2 = \pi - 0{,}775 \approx 2{,}366$.

3.51

$x_1 = \arccos 0{,}25 \approx 1{,}318$ og $x_2 = 2\pi - 1{,}318 \approx 4{,}965$.

3.52

$\arctan(-3) \approx -1{,}249$. Legger vi til π og 2π, får vi $x \approx 1{,}893$ og $x \approx 5{,}034$.

3.53

$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ eller $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, der n er et heltall.

3.54

$x = \pi + 2\pi n$.

3.55

$10 + 8\sin v = 14$ gir $\sin v = \frac{1}{2}$, så $v = \frac{\pi}{6}$ og $v = \frac{5\pi}{6}$.

3.56

Det er to runder, og to løsninger per runde, så 4 løsninger.

3.57

Tangens har periode π og går fra $-\infty$ til ∞ i hvert intervall mellom to loddrette asymptoter, og den er voksende der. Den tar derfor hver verdi nøyaktig én gang per periode.

3.58

```
1.047
5.236
```

Løsningene av $\cos x = 0{,}5$ i $[0, 2\pi]$ er $\frac{\pi}{3}$ og $\frac{5\pi}{3}$.

3.59

```
from math import asin, pi
x1 = asin(0.3)
x2 = pi - x1
print(round(x1, 3), round(x2, 3))
```

Utskriften er 0,305 og 2,837.

3.60

$\sin(\pi - x_1) = \sin x_1 = a$ ifølge symmetriformelen. ■

3.3.2 Sammensatte likninger

3.61

$2x = \frac{\pi}{3}$ eller $2x = \frac{2\pi}{3}$, så $x = \frac{\pi}{6}$ eller $x = \frac{\pi}{3}$.

3.62

$2x = \frac{\pi}{3}$ eller $2x = \frac{5\pi}{3}$, så $x = \frac{\pi}{6}$ eller $x = \frac{5\pi}{6}$.

3.63

$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, så $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$. I $[0, \pi]$: $x = \frac{\pi}{8}$ og $x = \frac{5\pi}{8}$.

3.64
$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6}$ eller $\frac{5\pi}{6}$ (innenfor $[0, 2\pi]$), så $x = \frac{\pi}{3}$ eller $x = \frac{5\pi}{3}$.

3.65
$x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, så $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ eller $x = 2\pi n$. I $[0, 2\pi]$: $x = 0$, $\frac{\pi}{3}$ og 2π.

3.66
$\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, så $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

3.67
$\sin x(\sin x - 1) = 0$ gir $\sin x = 0$ eller $\sin x = 1$. Løsningene er $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi$.

3.68
Med $u = \cos x$: $2u^2 - u - 1 = 0$ gir $u = 1$ eller $u = -\frac{1}{2}$. Løsningene er $x = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$.

3.69
$1 - \cos^2 x = 1 + \cos x$ gir $\cos^2 x + \cos x = 0$, altså $\cos x(\cos x + 1) = 0$. Da er $\cos x = 0$ eller $\cos x = -1$: $x = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

3.70
$\cos x(2\sin x - 1) = 0$ gir $\cos x = 0$ eller $\sin x = \frac{1}{2}$. Løsningene er $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$.

3.71
$\frac{\sin x}{\cos x} = 2\sin x$ gir $\sin x(1 - 2\cos x) = 0$ (med $\cos x \neq 0$). Da er $\sin x = 0$ eller $\cos x = \frac{1}{2}$: $x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$.

3.72
Perioden er $\frac{2\pi}{3}$. Likningen har én løsning per periode, og i $[0, 2\pi]$ er det tre perioder, så 3 løsninger: $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$.

3.73
0.5. Verdien $x = \frac{\pi}{12}$ er en løsning av $\sin 2x = 0{,}5$.

3.74
0.739. Det er løsningen av $\cos x = x$.

3.75
$\sin x$ er 0 for $x = 0$, π og 2π. Dividerer vi med et uttrykk som kan være 0, mister vi disse løsningene. Faktoriser i stedet.

3.4.1 Sum- og differanseformlene

3.76
a) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

3.77
a) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

3.78
$\tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}\cdot 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}268$.

3.79
$\cos u = \frac{3}{5}$ og $\sin v = \frac{5}{13}$. Da er $\sin(u + v) = \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} + \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{63}{65}$ og $\cos(u + v) = \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} - \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{16}{65}$.

3.80
$\cos u = -\frac{12}{13}$ og $\sin v = -\frac{4}{5}$. $\cos(u - v) = \cos u\cos v + \sin u\sin v = -\frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5} + \frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{56}{65}$.

3.81
$\sin(x + \pi) = \sin x\cos\pi + \cos x\sin\pi = -\sin x + 0 = -\sin x$. ■

3.82
$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x\cos\frac{\pi}{2} + \sin x\sin\frac{\pi}{2} = 0 + \sin x = \sin x$. ■

3.83
$(\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 - 2\sin x\cos x$. ■

3.84
$1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$. ■

3.85
$\sin u\cos v + \cos u\sin v + \sin u\cos v - \cos u\sin v = 2\sin u\cos v$. ■

3.86
$\cos u\cos v - \sin u\sin v + \cos u\cos v + \sin u\sin v = 2\cos u\cos v$. ■

3.87
$\left(1 - \cos^2 x\right)\left(1 + \tan^2 x\right) = \sin^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x$. ■

3.88
$\tan(u + v) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{5/6}{5/6} = 1$. Siden $u + v$ er mellom 0 og π og $\tan(u + v) = 1$, er $u + v = \frac{\pi}{4}$.

3.89
$\tan\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3} \approx 3{,}73$, mens $\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}58$.

3.90
0.966. Det er $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

3.4.2 Dobbel vinkel og harmonisk sum

3.91
$\cos x = \frac{12}{13}$. $\sin 2x = 2\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{12}{13} = \frac{120}{169}$, $\cos 2x = \frac{144 - 25}{169} = \frac{119}{169}$ og $\tan 2x = \frac{120}{119}$.

3.92
a) $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3.93
$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$, så $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$. $\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$, så $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

3.94
$\frac{\sin 2x}{2\sin x} = \frac{2\sin x\cos x}{2\sin x} = \cos x$. ■

3.95
$\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$. ■

3.96
$\cos^4 x - \sin^4 x = \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = \cos 2x \cdot 1 = \cos 2x$. ■

3.97
$2\sin x\cos x - \cos x = 0$ gir $\cos x(2\sin x - 1) = 0$. Da er $\cos x = 0$: $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, eller $\sin x = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

3.98
$2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0$ gir $2u^2 + u - 1 = 0$ med $u = \cos x$, så $u = \frac{1}{2}$ eller $u = -1$. Løsningene er $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ og $x = \pi$.

3.99
$1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x$ gir $\sin x(1 - 2\sin x) = 0$. Da er $\sin x = 0$: $x = 0, \pi, 2\pi$, eller $\sin x = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

3.100
$R = \sqrt{1+3} = 2$. $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ og $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, så $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Altså $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

3.101
Her er $a = -1$ og $b = 1$, så $R = \sqrt{2}$. $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ og $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, så $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Altså $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$.

3.102
$R = \sqrt{25+144} = 13$. Største verdi er 13 og minste verdi er -13.

3.103
$R = 2$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{1}{2}$, så $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Likningen er $2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$, altså $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Da er $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ eller $\frac{2\pi}{3}$, så $x = \frac{\pi}{6}$ eller $x = \frac{\pi}{2}$.

3.104
```
1.414
0.785
```
Det er $R = \sqrt{2}$ og $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

3.105
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Med $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ blir det $2\cos^2 x - 1$, og med $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ blir det $1 - 2\sin^2 x$. De er like på grunn av $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

3.5.1 Grafene til sinus, cosinus og tangens

3.106
Periode: 2π, 2π, π. Nullpunkter: $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pi n$.

Verdimengde: $[-1,1]$, $[-1,1]$, alle reelle tall.

3.107
$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ og $\frac{7\pi}{2}$: 4 nullpunkter.

3.108
Toppunktene er $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ og $\frac{9\pi}{2}$, altså 3 løsninger.

3.109
a) $0 < x < \pi$

b) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ og $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$

3.110
$\sin x = \frac{1}{2}$ for $\frac{\pi}{6}$ og $\frac{5\pi}{6}$. Løsningen er $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$.

3.111
$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ for $\frac{\pi}{3}$ og $\frac{2\pi}{3}$. Løsningen er $\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$.

3.112
$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ for $\frac{3\pi}{4}$ og $\frac{5\pi}{4}$. Cosinus er mindre enn dette mellom dem: $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$.

3.113
Tangens er voksende og $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, så $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$.

3.114
a) $[-1,3]$

b) $[-4,-2]$

c) $[-5,5]$

3.115
$\tan x = 1$ har løsningene $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$ og $\frac{13\pi}{4}$: 4 løsninger.

3.116
$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ og $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1$.

3.117
```
1.0 -1.0
```

3.118
2. Cosinus skifter fortegn i $\frac{\pi}{2}$ og $\frac{3\pi}{2}$.

3.119
Tangens er $\frac{\sin x}{\cos x}$. Der $\cos x = 0$ er nevneren 0, mens $\sin x = \pm 1$, så brøken vokser over alle grenser når x nærmer seg disse verdiene.

3.120
For hver x er $\cos x$ lik verdien av sinus i punktet $\frac{\pi}{2}$ lenger til høyre. Grafen til $\cos x$ er derfor grafen til $\sin x$ flyttet $\frac{\pi}{2}$ enheter til venstre.

3.5.2 Sinusfunksjoner

3.121
Amplitude 4. Periode $\frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$.

Likevektslinje $y = 3$. Største verdi 7 og minste verdi -1.

3.122
$3x - \pi = 3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Perioden er $\frac{2\pi}{3}$, og grafen er forskjøvet $\frac{\pi}{3}$ mot høyre.

3.123
Amplituden er 3. Største verdi er 5 og minste verdi er -1. $\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 + 2 = -1$, så grafen er speilet om likevektslinja.

3.124
$A = \frac{10 - (-2)}{2} = 6$ og $d = \frac{10 + (-2)}{2} = 4$.

3.125
$A = 3$, $d = 2$ og $c = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Funksjonen er $f(x) = 3\sin 2x + 2$.

3.126
$A = 3$ og $d = 6$. En halv periode er 4, så $T = 8$ og $c = \frac{\pi}{4}$. Toppunktet kommer en kvart periode (2) etter forskyvningen, så $x_0 = -1$: $f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right) + 6$.

3.127
Lengste dag: 18 timer, korteste: 6 timer. Toppunktet kommer en kvart periode etter forskyvningen: $t = 80 + \frac{365}{4} \approx 171$ (rundt 21. juni).

3.128
$T(10) = 12$. $T = 16$ gir $\sin\left(\frac{\pi}{12}(t-10)\right) = \frac{1}{2}$, så $\frac{\pi}{12}(t-10) = \frac{\pi}{6}$ eller $\frac{5\pi}{6}$, altså $t = 12$ eller $t = 20$.

3.129
Amplituden er 0,2 m. Perioden er 1,5 s. $h(0{,}75) = 0{,}2\cos\pi = -0{,}2$ m, så pendelet er helt ute på motsatt side.

3.130
Grafen forskyves $\frac{\pi}{2}$ mot høyre og 1 enhet opp. (Det er det samme som $-2\cos x + 1$.)

3.131
$\sin 2x = \frac{1}{2}$ gir $2x = \frac{\pi}{6}$ eller $\frac{5\pi}{6}$, så $x = \frac{\pi}{12}$ eller $x = \frac{5\pi}{12}$.

3.132
Perioden er $\frac{2\pi}{3}$, siden $\sin(3(x+T)) = \sin(3x)$ krever $3T = 2\pi$.

3.133
3.5 5.5

3.134
$\sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = \sin u\cos\frac{\pi}{2} + \cos u\sin\frac{\pi}{2} = \cos u$. Med $u = cx$ følger påstanden. ■

3.135

```
from math import sin, pi

T = lambda t: 5*sin(pi/12*(t - 9)) + 10
verdier = [T(t) for t in range(0, 24, 3)]
print(round(max(verdier), 2))
```

Utskriften er 15,0, siden $t = 15$ er med i listen, og der er temperaturen på sitt høyeste.

3.6.1 Derivasjon av trigonometriske funksjoner

3.136
a) $f'(x) = 4\cos x - \sin x$
b) $g'(x) = 5\cos(5x)$
c) $h'(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$
d) $k'(x) = \frac{2}{\cos^2(2x)}$

3.137
a) $f'(x) = 2\sin x\cos x$
b) $g'(x) = -3\cos^2 x\sin x$
c) $h'(x) = 2x\cos(x^2)$

3.138
a) $f'(x) = \cos x - x\sin x$
b) $g'(x) = e^x\sin x + e^x\cos x = e^x(\sin x + \cos x)$
c) $h'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

3.139
$f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x$. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

3.140
$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ og $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Tangenten er $y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

3.141
$f'(x) = 2\cos x = 0$ gir $x = \frac{\pi}{2}$ og $x = \frac{3\pi}{2}$. Toppunktet er $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ og bunnpunktet er $\left(\frac{3\pi}{2}, -3\right)$.

3.142
$f'(x) = \cos x - \sin x = 0$ gir $\tan x = 1$, så $x = \frac{\pi}{4}$ og $x = \frac{5\pi}{4}$. Toppunktet er $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ og bunnpunktet er $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

3.143
$f'(x) = 1 - 2\sin x = 0$ gir $\sin x = \frac{1}{2}$, så $x = \frac{\pi}{6}$ og $x = \frac{5\pi}{6}$. Fortegnet til f' er $+$ for $x < \frac{\pi}{6}$, $-$ mellom $\frac{\pi}{6}$ og $\frac{5\pi}{6}$, og $+$ etter. Toppunktet er $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$ og bunnpunktet er $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$.
(Regnet over hele $[0, 2\pi]$ finnes også randpunkter.)

3.144
$T'(t) = \frac{6\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12}(t-8)\right) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}(t-8)\right)$. Klokka 8 er $T'(8) = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ grader per time.

3.145
Stigningstallet er $f'(x) = \cos x$, med største verdi 1 for $x = 2\pi n$, altså i nullpunktene der grafen stiger.

3.146
$\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\cdot 1 = -\sin x$. ■

3.147
Kjerneregelen: $2\cos 2x$.
Produktregelen: $2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 2\cos 2x$. ■

3.148
-0.479. Det er $(\cos x)'$ i $x = 0{,}5$, altså $-\sin 0{,}5 \approx -0{,}479$.

3.6.2 Integrasjon av trigonometriske funksjoner

3.149
a) $3\sin x + 2\cos x + C$
b) $-\frac{\cos 4x}{4} + C$
c) $2\sin\frac{x}{2} + C$

3.150
a) $\left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = 0 + 1 = 1$
b) $\left[\sin x\right]_0^{\pi} = 0$
c) $\left[\sin x\right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{2}$

3.151
a) $\left[-2\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\pi} = 0 + 2 = 2$
b) $\left[\tan x\right]_0^{\pi/4} = 1$

3.152
a) $\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$
b) $\left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$

3.153
a) Med $u = \sin x$: $\frac{\sin^2 x}{2} + C$
b) Med $u = \sin x$: $\frac{\sin^4 x}{4} + C$

3.154
$\left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\pi/4} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0{,}347$

3.155
Med $u = x$, $v' = \cos x$: $x\sin x - \int\sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$.
Bestemt: $\left[x\sin x + \cos x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}571$.

3.156
$\int_0^{\pi} 2\sin x\,dx = 2\cdot 2 = 4$.

3.157

Fra 0 til π er arealet 2, og fra π til 2π er det også 2. Totalt 4. Integralet er 0.

3.158

$\frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot 1 = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637.$

3.159

$V = \pi\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx = \pi\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4} \approx$ 2,47.

3.160

1.0. Det er $\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx = 1$, siden F er en antiderivert til $\cos x$.

3.161

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, så $\int\cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$. ■

3.162

$\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx = \pi$, så gjennomsnittet er $\frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$. Det kommer av $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, der cosinusleddet har gjennomsnitt 0.