# 2 Integrasjon

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler. Fasiten står bakerst.

## Formelark

### BESTEMT INTEGRAL OG NUMERIKK

*Definisjon*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

*Trapessum*

$$T_n = \Delta x\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + \frac{f(x_n)}{2}\right]$$

*Regneregler*

$$\int_a^b (cf+g) = c\int_a^b f + \int_a^b g$$

### ANVENDELSER

*Areal mellom to grafer*

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

*Gjennomsnittsverdi*

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

- Areal over aksen teller positivt, under aksen negativt. Total strekning bruker $|v|$.

### ANTIDERIVERT OG FUNDAMENTALTEOREMET

*Fundamentalteoremet*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

*Potens*

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

*Eksponential*

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$$

*Invers*

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

### INTEGRASJONSMETODER

*Substitusjon*

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

*Delvis integrasjon*

$$\int u\,v'\,dx = u\,v - \int u'\,v\,dx$$

*Delbrøker*

$$\frac{r(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

### VOLUM OG OVERFLATE

*Volum om x-aksen*

$$V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$$

*Volum med kjent tverrsnitt*

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

*Kurvelengde*

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

*Overflate*

$$O = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

## 2.1.1 Areal som grense av summer

EKSEMPEL *Tre summer for $x^2$*

Regn ut $V_4$, $H_4$ og $M_4$ for $f(x) = x^2$ på $[0, 1]$.

*Løsning*

Venstresummen bruker $x = 0, 0{,}25, 0{,}5, 0{,}75$:

$$V_4 = 0{,}25 \cdot (0 + 0{,}0625 + 0{,}25 + 0{,}5625) = 0{,}21875$$

Høyresummen bruker $x = 0{,}25, 0{,}5, 0{,}75, 1$:

$$H_4 = 0{,}25 \cdot (0{,}0625 + 0{,}25 + 0{,}5625 + 1) = 0{,}46875$$

Midtpunktsummen bruker $x = 0{,}125, 0{,}375, 0{,}625, 0{,}875$:

$$M_4 = 0{,}25 \cdot (0{,}015625 + 0{,}140625 + 0{,}390625 + 0{,}765625) = 0{,}328125$$

Arealet ligger mellom 0,219 og 0,469. Midtpunktsummen er et godt anslag. ∎

EKSEMPEL *Grenseverdien for $x^2$*

Vis at høyresummen $H_n$ for $f(x) = x^2$ på $[0, 1]$ går mot $\frac{1}{3}$ når $n \to \infty$.

*Løsning*

Med $\Delta x = \frac{1}{n}$ og $x_k = \frac{k}{n}$ er

$$H_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Ganger vi ut telleren og deler på $n^2$, får vi

$$H_n = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Når $n \to \infty$, går de to siste leddene mot 0, så $H_n \to \frac{1}{3}$. Arealet under $y = x^2$ fra 0 til 1 er derfor $\frac{1}{3}$. ∎

**2.1** Intervallet $[1, 5]$ deles i 8 like brede delintervaller. Hva er $\Delta x$, og hva er delepunktene $x_0, x_1, x_2$?

**2.2** Regn ut venstresummen $V_4$ og høyresummen $H_4$ for $f(x) = 2x$ på $[0, 2]$.

**2.3** Regn ut $V_4$ og $H_4$ for $f(x) = x^2$ på $[0, 2]$.

**2.4** Regn ut midtpunktsummen $M_2$ for $f(x) = x^2$ på $[0, 2]$.

**2.5** Regn ut $V_4$ og $H_4$ for $f(x) = 4 - x^2$ på $[0, 2]$. Hvilken er en undersum?

**2.6** Forklar hvorfor venstresummen er en undersum for en voksende funksjon.

**2.7** Regn ut $V_3$ og $H_3$ for $f(x) = \frac{1}{x}$ på $[1, 4]$.

**2.8** En bil kjører med farten $v(t)$ m/s, og vi vet $v(0) = 0$, $v(2) = 6$, $v(4) = 10$ og $v(6) = 12$. Bruk venstresummen med $\Delta t = 2$ til å anslå strekningen de første 6 sekundene, og forklar hva summen betyr.

**2.9** Hvor mange rektangler trengs for at forskjellen $H_n - V_n$ for $f(x) = x$ på $[0, 4]$ skal bli mindre enn 0,1?

**2.10** Hva blir utskriften?

*Python*

```
dx = 0.5
s = 0
for i in range(1, 5):
    s = s + (i * dx) * dx
print(s)
```

**2.11** Skriv et program som regner ut midtpunktsummen $M_n$ for $f(x) = x^2$ på $[0, 1]$, og test det for $n = 4$.

**2.12** Vis at høyresummen for $f(x) = x$ på $[0, 2]$ er $H_n = 2 + \frac{2}{n}$, og finn grensen.

**2.13** Vis at høyresummen for $f(x) = x^2$ på $[0, 3]$ er $H_n = \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2}$, og finn grensen.

**2.14** For hvilke funksjoner er venstresummen lik høyresummen for alle $n$?

## 2.1.2 Bestemt integral

EKSEMPEL *Integral fra arealformler*

Regn ut

a) $\int_0^4 x\,dx$

b) $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx$

c) $\int_{-3}^{3} x\,dx$

*Løsning*

a) Grafen til $y = x$ fra 0 til 4 danner en trekant med grunnlinje 4 og høyde 4:

$$\int_0^4 x\,dx = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

b) Grafen til $y = \sqrt{4 - x^2}$ er den øvre halvdelen av sirkelen $x^2 + y^2 = 4$ med radius 2:

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 2\pi$$

c) Fra $-3$ til 0 ligger grafen under aksen, og det gir $-\frac{3 \cdot 3}{2} = -4{,}5$. Fra 0 til 3 ligger den over, og det gir $+4{,}5$. Til sammen blir integralet 0. ∎

EKSEMPEL *Bruke regnereglene*

Det er gitt at $\int_0^5 f(x)\,dx = 7$ og $\int_5^8 f(x)\,dx = -3$. Regn ut

a) $\int_0^8 f(x)\,dx$

b) $\int_0^5 (2f(x) + 3)\,dx$

*Løsning*

a) Vi legger sammen de to delene:

$$\int_0^8 f(x)\,dx = 7 + (-3) = 4$$

b) Vi deler opp i to integraler og trekker ut konstanten:

$$\int_0^5 (2f(x)+3)dx = 2\cdot 7 + \int_0^5 3\,dx = 14 + 3\cdot 5 = 29$$

■

EKSEMPEL *Fart og forflytning*

En ball ruller med farten $v(t) = 2t - 4$ m/s langs en rett linje, der positiv fart betyr høyre. Regn ut $\int_0^4 v(t)\,dt$ og forklar hva tallet betyr.

*Løsning*

Fra $t = 0$ til $t = 2$ er farten negativ. Trekanten under aksen har grunnlinje 2 og høyde 4, og bidrar med $-\frac{2\cdot 4}{2} = -4$. Fra $t = 2$ til $t = 4$ er farten positiv, og trekanten har samme størrelse, så den bidrar med $+4$.

$$\int_0^4 v(t)\,dt = -4 + 4 = 0$$

Integralet er forflytningen: Ballen er tilbake der den startet. Den har rullet 4 m til venstre og 4 m til høyre, så den totale strekningen er 8 m. ■

**2.15** Regn ut ved å bruke arealformler.

a) $\int_0^5 4\,dx$

b) $\int_0^4 3x\,dx$

c) $\int_1^4 (2x-1)\,dx$

**2.16** Regn ut $\int_{-1}^2 x\,dx$.

**2.17** Regn ut $\int_{-5}^5 \sqrt{25-x^2}\,dx$.

**2.18** Regn ut $\int_0^4 \left(2 - \frac{x}{2}\right)dx$.

**2.19** Regn ut $\int_0^6 (x-3)\,dx$ og forklar svaret.

**2.20** Det er gitt at $\int_1^4 f(x)\,dx = 9$ og $\int_1^4 g(x)\,dx = 5$. Regn ut

a) $\int_1^4 (f(x)+g(x))dx$

b) $\int_1^4 (3f(x)-2g(x))dx$

c) $\int_4^1 f(x)\,dx$

**2.21** Det er gitt at $\int_0^2 f = 3$, $\int_2^6 f = -1$ og $\int_6^7 f = 4$. Regn ut $\int_0^7 f(x)\,dx$ og $\int_2^7 f(x)\,dx$.

**2.22** Regn ut $\int_0^3 (x+2)dx$ ved å bruke at $\int_0^3 x\,dx = 4{,}5$.

**2.23** En bil har farten $v(t) = 3t$ m/s. Hvor langt har den kjørt etter 8 sekunder?

**2.24** En tank fylles med 4 liter per minutt de første 5 minuttene og 2 liter per minutt de neste 5. Hvor mye er det i tanken etter 10 minutter (starter tom)?

**2.25** Farten til en ball er $v(t) = 4 - 2t$ m/s, positiv retning er opp. Regn ut $\int_0^2 v\,dt$ og $\int_0^4 v\,dt$, og tolk dem.

**2.26** Hva blir utskriften?

*Python*

```
dx = 0.5
s = 0
for i in range(4):
    x = (i + 0.5) * dx
    s = s + 2 * x * dx
print(s)
```

**2.27** Skriv et program som regner ut $\int_0^2 x^3\,dx$ omtrentlig med midtpunktsummen og $n = 1000$.

**2.28** Forklar hvorfor $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ når $f(x) \geqslant 0$ på $[a,b]$ og $a < b$.

## 2.2.1 Numeriske metoder for integral

EKSEMPEL *Trapessum for $x^2$*

Regn ut $T_4$ for $f(x) = x^2$ på $[0,1]$, og sammenlign med det riktige arealet $\frac{1}{3}$.

*Løsning*

$$T_4 = 0{,}25\cdot\left[\frac{0}{2} + 0{,}0625 + 0{,}25 + 0{,}5625 + \frac{1}{2}\right] = 0{,}25\cdot 1{,}375 = 0{,}34375$$

Det er 0,0104 mer enn $\frac{1}{3} \approx 0{,}3333$. Til sammenligning ga midtpunktsummen $M_4 = 0{,}3281$. ■

**2.29** Regn ut trapessummen $T_4$ for $f(x) = 2x$ på $[0,2]$ og sammenlign med det riktige arealet.

**2.30** Regn ut $T_4$ for $f(x) = x^2$ på $[0,2]$.

**2.31** Regn ut $M_4$ for $f(x) = x^2$ på $[0,2]$ og sammenlign med $T_4$ og det riktige arealet $\frac{8}{3} \approx 2{,}667$.

**2.32** Regn ut $T_3$ for $f(x) = \frac{1}{x}$ på $[1,4]$.

**2.33** Regn ut $M_3$ for $f(x) = \frac{1}{x}$ på $[1,4]$. Det riktige svaret er $\ln 4 \approx 1{,}386$. Hvilken sum er nærmest?

**2.34** Feilen til $M_{10}$ er 0,0008. Omtrent hvor stor er feilen til $M_{40}$?

**2.35** Forklar hvorfor trapessummen er eksakt for en rett linje.

**2.36** Forklar hvorfor trapessummen er større enn det riktige arealet for $f(x) = x^2$.

**2.37** En bil kjører med disse målte fartene (m/s): $v(0) = 0$, $v(2) = 3$, $v(4) = 8$, $v(6) = 10$ og $v(8) = 11$. Bruk trapesmetoden til å anslå strekningen de første 8 sekundene.

**2.38** Hva blir utskriften?

*Python*

```
n = 4
dx = 1 / n
s = 0
for i in range(n):
    s = s + (i * dx)**2 * dx
print(s)
```

**2.39** Hva blir utskriften?

*Python*

```
from math import sin, pi
n = 4
dx = pi / n
s = 0
for i in range(1, n):
    s = s + sin(i * dx)
print(round(dx * s, 3))
```

**2.40** Skriv et program som regner ut $\int_0^\pi \sin x\,dx$ med trapesmetoden ved å doble $n$ til to svar avviker med mindre enn $10^{-4}$.

**2.41** Hvorfor er midtpunktsummen for $f(x) = x^2$ for liten, mens trapessummen er for stor?

**2.42** Simpsons metode er $S_{2n} = \dfrac{2M_n + T_n}{3}$. Regn ut $S_2$ for $f(x) = x^3$ på $[0, 2]$ (bruk $n = 1$ i formelen) og sammenlign med det riktige svaret 4.

## 2.3.1 Areal under og mellom grafer

EKSEMPEL *Sinus over en hel periode*

Regn ut $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$ og arealet mellom grafen til $\sin x$ og $x$-aksen fra 0 til $2\pi$.

*Løsning*

Fra 0 til $\pi$ er arealet $\int_0^\pi \sin x\,dx = 2$. Fra $\pi$ til $2\pi$ er integralet $-2$. Derfor er

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 2 + (-2) = 0,$$

mens arealet er $2 + 2 = 4$. ∎

EKSEMPEL *Areal mellom en parabel og en linje*

Finn arealet av området mellom $f(x) = 4 - x^2$ og $g(x) = x + 2$.

*Løsning*

$4 - x^2 = x + 2$ gir $x^2 + x - 2 = 0$, altså $(x + 2)(x - 1) = 0$, så $x = -2$ og $x = 1$. Mellom dem er $f(x) > g(x)$ (for eksempel $f(0) = 4 > 2 = g(0)$). Arealet er

$$A = \int_{-2}^{1} \big(4 - x^2 - (x + 2)\big)dx = \int_{-2}^{1} \big(2 - x - x^2\big)dx = 4{,}5$$

∎

EKSEMPEL *Areal over og under aksen*

Finn arealet av området som avgrenses av grafen til $f(x) = x^3 - x$ og $x$-aksen.

*Løsning*

$x^3 - x = x(x - 1)(x + 1) = 0$ gir $x = -1$, 0 og 1. På $(-1, 0)$ er $f > 0$ (for eksempel $f(-0{,}5) = 0{,}375$), og på $(0, 1)$ er $f < 0$. Arealet er

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} \big(-(x^3 - x)\big)dx = 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$$

Hadde vi regnet ett integral fra $-1$ til 1, ville vi fått 0, fordi funksjonen er odde. ∎

Du kan bruke disse integralene i oppgavene:

$$\int_0^1 x\,dx = \tfrac{1}{2},\quad \int_0^1 x^2\,dx = \tfrac{1}{3},\quad \int_0^1 x^3\,dx = \tfrac{1}{4},\quad \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \tfrac{2}{3},\quad \int_0^\pi \sin x\,dx = 2,\quad \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 1$$

**2.43** Finn arealet mellom $y = 3x$ og $y = x$ fra $x = 0$ til $x = 2$.

**2.44** Finn arealet mellom $y = x + 2$ og $y = 1$ fra $x = 0$ til $x = 3$.

**2.45** Finn arealet mellom $y = x$ og $y = x^2$ fra $x = 0$ til $x = 1$.

**2.46** Finn arealet mellom $y = x$ og $y = x^3$ fra $x = 0$ til $x = 1$.

**2.47** Finn arealet mellom $y = \sqrt{x}$ og $y = x^2$ fra $x = 0$ til $x = 1$.

**2.48** Finn arealet mellom grafen til $\sin x$ og $x$-aksen fra 0 til $2\pi$.

**2.49** Regn ut $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx$ og finn arealet mellom grafen og aksen fra $-\pi$ til $\pi$. Forklar forskjellen.

**2.50** Finn arealet mellom grafen til $2\cos x$ og $x$-aksen fra 0 til $\pi$.

**2.51** Finn arealet av sirkelskiven som avgrenses av grafene til $y = \sqrt{9 - x^2}$ og $y = -\sqrt{9 - x^2}$.

**2.52** Finn skjæringspunktene mellom $y = x^2$ og $y = x + 2$.

**2.53** Hvilken graf ligger øverst mellom skjæringspunktene i forrige oppgave, og hvilket integral gir arealet mellom dem?

**2.54** Finn arealet av området mellom linja $y = 2$ og grafen til $y = \sqrt{4 - x^2}$ for $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

**2.55** Hva blir utskriften?

*Python*

```
n = 2
dx = 2 / n
s = 0
for i in range(n):
    x = (i + 0.5) * dx
    s = s + (2*x - x**2) * dx
print(s)
```

**2.56** Forklar hvorfor vi regner «øverste minus nederste» når vi finner arealet mellom to grafer.

**2.57** Regn ut $\int_0^3 \left(x^2 - 2x\right)dx$ og arealet mellom grafen og x-aksen fra 0 til 3, når du vet at arealet fra 0 til 2 er $\frac{4}{3}$ og fra 2 til 3 også er $\frac{4}{3}$.

## 2.3.2 Integral i praktiske situasjoner

EKSEMPEL *Forflytning og strekning*

Farten til en kloss er $v(t) = 6 - 2t$ m/s for $0 \leqslant t \leqslant 5$. Finn forflytningen og den totale strekningen.

*Løsning*

Fra $t = 0$ til $t = 3$ er $v > 0$. Trekanten har grunnlinje 3 og høyde 6, og areal 9. Fra $t = 3$ til $t = 5$ er $v < 0$. Trekanten har grunnlinje 2 og høyde 4, og areal 4.

Forflytningen er $9 - 4 = 5$ m. Den totale strekningen er $9 + 4 = 13$ m. ∎

EKSEMPEL *Gjennomsnittsfart*

Farten til en bil er $v(t) = 3t$ m/s for $0 \leqslant t \leqslant 8$. Finn gjennomsnittsfarten.

*Løsning*

Strekningen er arealet av trekanten: $\int_0^8 3t\,dt = \frac{8 \cdot 24}{2} = 96$ m. Gjennomsnittsfarten er

$$\bar{v} = \frac{96}{8} = 12 \ \text{m/s}$$

Den er midt mellom starten (0) og slutten (24), som den skal være for en rett linje. ∎

EKSEMPEL *Gjennomsnittlig temperatur*

Temperaturen i løpet av et døgn er $T(t) = 10 + 5\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ grader, der t er timer etter midnatt. Finn gjennomsnittstemperaturen over 24 timer.

*Løsning*

Sinusleddet er positivt halve døgnet og negativt den andre halvparten, og de to delene er like store, så $\int_0^{24} 5\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)dt = 0$. Integralet av den konstante 10 er $10 \cdot 24 = 240$. Gjennomsnittet er

$$\bar{T} = \frac{240 + 0}{24} = 10 \ \text{grader}$$

∎

EKSEMPEL *Vannføring i en elv*

Vannføringen q (i $m^3$ per time) i en elv ble målt hver time:

| t (timer) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| q | 0 | 2 | 5 | 4 | 1 |

Anslå vannmengden som har passert i løpet av de 4 timene.

*Løsning*

$$T_4 = 1 \cdot \left[\frac{0}{2} + 2 + 5 + 4 + \frac{1}{2}\right] = 11{,}5 \ \text{m}^3$$

∎

**2.58** En sykkel har farten $v(t) = 4t$ m/s for $0 \leqslant t \leqslant 5$. Hvor langt kommer den?

**2.59** Farten til en kloss er $v(t) = 8 - 2t$ m/s for $0 \leqslant t \leqslant 6$. Finn forflytningen og den totale strekningen.

**2.60** En kran gir 5 liter per minutt de første 4 minuttene og 3 liter per minutt de neste 6 minuttene. Hvor mange liter renner ut?

**2.61** En varmeovn bruker 1,5 kW i 4 timer og 0,5 kW i 6 timer. Hvor mye energi bruker den?

**2.62** Forbruket av bensin i en motor er $f(t) = 5 + 2t$ liter per time for $0 \leqslant t \leqslant 3$. Hvor mye bensin brukes?

**2.63** Finn gjennomsnittsverdien til $f(x) = 2x + 1$ på $[0, 4]$.

**2.64** Det er gitt at $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Hva er gjennomsnittsverdien til $x^2$ på $[0, 1]$?

**2.65** En bil øker farten jevnt fra 0 til 20 m/s på 10 s. Hva er gjennomsnittsfarten, og hvor langt kommer bilen?

**2.66** En syklist har målt farten (m/s) hvert 5. sekund: $v(0) = 0$, $v(5) = 3$, $v(10) = 7$, $v(15) = 9$ og $v(20) = 10$. Bruk trapesmetoden til å anslå strekningen.

**2.67** Vannføringen i en bekk ($m^3$ per time) er målt hver time: 0, 3, 6, 4, 2 (for $t = 0, 1, 2, 3, 4$). Anslå vannmengden de første 4 timene.

**2.68** Hva er enheten til integralet $\int_0^{30} r(t)\,dt$ når $r(t)$ måles i kg per dag og t i dager? Hva betyr tallet?

**2.69** Det er gitt at $\int_0^4 v\,dt = 3$ og $\int_4^6 v\,dt = -5$, og at $v \geqslant 0$ på $[0, 4]$ og $v \leqslant 0$ på $[4, 6]$. Finn forflytningen og den totale strekningen fra $t = 0$ til $t = 6$.

**2.70** Hva blir utskriften?

*Python*

```
dt = 2
s = 0
for i in range(3):
    t = 2*i + 1
    s = s + 3*t * dt
print(s)
```

**2.71** Hva blir utskriften?

*Python*

```
n = 4
f = lambda x: 2*x
xs = [(i + 0.5) * 0.5 for i in range(n)]
print(sum(f(x) for x in xs) / n)
```

**2.72** Vis at gjennomsnittsverdien til en lineær funksjon $f(x) = mx + c$ på $[a, b]$ er gjennomsnittet av $f(a)$ og $f(b)$.

**2.73** Forklar hvorfor gjennomsnittsverdien til en funksjon alltid ligger mellom den minste og den største funksjonsverdien.

## 2.4.1 Antiderivert og ubestemt integral

EKSEMPEL *Antiderivert til et polynom*

Finn $\int\left(3x^2 + 2x - 5\right)dx$.

*Løsning*

$$\int\left(3x^2 + 2x - 5\right)dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 5x + C = x^3 + x^2 - 5x + C$$

Kontroll: $\left(x^3 + x^2 - 5x\right)' = 3x^2 + 2x - 5$. ∎

EKSEMPEL *Røtter og brøker*

Finn

a) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$

b) $\int \sqrt{x}\,dx$

*Løsning*

a) $\int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

b) $\int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$ ∎

EKSEMPEL *Eksponentialfunksjon*

Finn $\int\left(e^{2x} + \frac{3}{x}\right)dx$ for $x > 0$.

*Løsning*

$$\int\left(e^{2x} + \frac{3}{x}\right)dx = \frac{e^{2x}}{2} + 3\ln x + C$$

Kontroll: $\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' = \frac{2e^{2x}}{2} = e^{2x}$. ∎

EKSEMPEL *Posisjon fra fart*

En partikkel har farten $v(t) = 6t - t^2$ m/s og er i $s(0) = 0$ ved $t = 0$. Finn posisjonen $s(t)$ og $s(3)$.

*Løsning*

$$s(t) = \int\left(6t - t^2\right)dt = 3t^2 - \frac{t^3}{3} + C$$

Fra $s(0) = 0$ får vi $C = 0$, så $s(t) = 3t^2 - \frac{t^3}{3}$. Da er $s(3) = 27 - 9 = 18$ m. ∎

EKSEMPEL *Antiderivert gjennom et punkt*

Finn den antideriverte $F$ til $f(x) = 2x$ som går gjennom punktet $(2, 5)$.

*Løsning*

Alle antideriverte er $F(x) = x^2 + C$. Fra $F(2) = 5$ får vi $4 + C = 5$, altså $C = 1$. Svaret er $F(x) = x^2 + 1$. ∎

**2.74** Finn $\int\left(4x^3 - 6x^2 + 2\right)dx$.

**2.75** Finn

a) $\int x^5\,dx$

b) $\int \frac{1}{x^3}\,dx$

c) $\int\left(x^5 + \frac{1}{x}\right)dx$ for $x > 0$

**2.76** Finn

a) $\int \sqrt{x}\,dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

**2.77** Finn

a) $\int 3e^{2x}\,dx$

b) $\int e^{-3x}\,dx$

c) $\int 2^x\,dx$

**2.78** Regn ut $\int (x+1)^2\,dx$ ved å multiplisere ut først.

**2.79** Regn ut $\int \frac{x^2+1}{x}\,dx$ for $x > 0$.

**2.80** Regn ut $\int (x-1)(x+2)\,dx$.

**2.81** Finn $F(x)$ når $F'(x) = 4x - 3$ og $F(1) = 2$.

**2.82** Farten til en partikkel er $v(t) = 3t^2 - 2t$ m/s, og posisjonen er $s(0) = 5$. Finn $s(t)$ og $s(2)$.

**2.83** Finn den antideriverte til $f(x) = \frac{1}{x}$ som går gjennom punktet $(1, 3)$.

**2.84** Vis at $F(x) = x\ln x - x$ er en antiderivert til $f(x) = \ln x$ for $x > 0$.

**2.85** Per sier at $\int x^2\,dx = x^3$. Hva er feil?

**2.86** Hva blir utskriften?

*Python*

```
f = lambda x: 4*x**3
F = lambda x: x**4
print(F(2) - F(1))
```

Hva regner programmet ut?

**2.87** To funksjoner $F$ og $G$ er begge antideriverte til $f$. Vis at $F(x) - G(x)$ er en konstant.

**2.88** Forklar hvorfor det ikke finnes en antiderivert til $\frac{1}{x}$ av typen $x^n$.

## 2.4.2 Analysens fundamentalteorem

EKSEMPEL *Bestemte integraler eksakt*

Regn ut

a) $\int_1^3 (2x+1)\,dx$

b) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

c) $\int_0^1 e^{2x}\,dx$

*Løsning*

a) $F(x) = x^2 + x$, så

$$\int_1^3 (2x+1)\,dx = \Big[\, x^2 + x \Big]_1^3 = (9+3) - (1+1) = 10$$

b) $F(x) = \ln x$, så $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$.

c) $F(x) = \frac{e^{2x}}{2}$, så

$$\int_0^1 e^{2x}\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2-1}{2} \approx 3{,}19$$

■

EKSEMPEL *Areal mellom to grafer, eksakt*

Finn det eksakte arealet mellom $f(x) = 4 - x^2$ og $g(x) = x + 2$.

*Løsning*

En antiderivert til $2 - x - x^2$ er $F(x) = 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$. Da er

$$A = F(1) - F(-2) = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right) = \frac{7}{6} - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

Arealet er $\frac{9}{2} = 4{,}5$, som vi fant numerisk tidligere.

■

EKSEMPEL *Forflytning og strekning*

Farten til en partikkel er $v(t) = t^2 - 4t + 3$ m/s for $0 \leqslant t \leqslant 4$. Finn forflytningen og den totale strekningen.

*Løsning*

En antiderivert er $s(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$. Forflytningen er

$$s(4) - s(0) = \frac{64}{3} - 32 + 12 = \frac{4}{3} \text{ m}$$

Nullpunktene til $v$ er $t = 1$ og $t = 3$ (fra $(t-1)(t-3) = 0$). Mellom dem er $v < 0$. Fra 0 til 1 er forflytningen $s(1) - s(0) = \frac{4}{3}$, fra 1 til 3 er den $s(3) - s(1) = -\frac{4}{3}$, og fra 3 til 4 er den $s(4) - s(3) = \frac{4}{3}$. Den totale strekningen er

$$\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4 \text{ m}$$

■

EKSEMPEL *Derivert av en integralfunksjon*

Finn den deriverte til $G(x) = \int_1^x t^2\,dt$.

*Løsning*

Ifølge del 1 er $G'(x) = x^2$. Kontroll: $G(x) = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$, og $G'(x) = x^2$.

■

**2.89** Regn ut

a) $\int_0^3 x^2\,dx$

b) $\int_1^2 4x^3\,dx$

c) $\int_{-1}^2 (3x^2 - 2x)\,dx$

**2.90** Regn ut

a) $\int_1^9 \sqrt{x}\,dx$

b) $\int_1^4 \frac{1}{x^2}\,dx$

c) $\int_1^{e^2} \frac{1}{x}\,dx$

**2.91** Regn ut

a) $\int_0^1 e^x\,dx$

b) $\int_0^2 e^{-x}\,dx$

c) $\int_0^1 3e^{3x}\,dx$

**2.92** Finn det eksakte arealet mellom $y = x$ og $y = x^3$ fra $x = 0$ til $x = 1$.

**2.93** Finn det eksakte arealet mellom $y = x^2$ og $y = x + 2$.

**2.94** Finn arealet mellom $y = x^2 - 4$ og x-aksen.

**2.95** Finn arealet mellom $y = x^3 - 4x$ og x-aksen.

**2.96** Finn gjennomsnittsverdien til $f(x) = x^2 + 1$ på $[0, 3]$.

**2.97** Farten til en partikkel er $v(t) = 2t - 6$ m/s for $0 \leqslant t \leqslant 6$. Finn forflytningen og den totale strekningen.

**2.98** Hva er $\frac{d}{dx}\int_2^x e^{t^2}\,dt$?

**2.99** Finn $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ som en funksjon av $x$ for $x > 0$, og bekreft at den deriverte er $\frac{1}{x}$.

**2.100** Forklar hvorfor $\int_{-2}^2 x^3\,dx = 0$ uten å regne ut en antiderivert.

**2.101** Hva blir utskriften?

*Python*

```
F = lambda x: x**2 + x
print(F(3) - F(1))
```

Hvilket integral er det?

**2.102** Vis at $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$, og bruk det til å finne endringen i temperatur fra $t = 0$ til $t = 3$ når $T'(t) = 2t - 4$ grader per time.

## 2.5.1 Substitusjon

EKSEMPEL *Uttrykk i potens*

Regn ut $\int 2x\left(x^2+1\right)^3\,dx$.

*Løsning*

Sett $u = x^2+1$. Da er $du = 2x\,dx$, og

$$\int 2x\left(x^2+1\right)^3\,dx = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\left(x^2+1\right)^4}{4} + C$$

Kontroll: $\left(\dfrac{(x^2+1)^4}{4}\right)' = (x^2+1)^3 \cdot 2x$.

■

EKSEMPEL *Mangler en faktor*

Regn ut $\int x\,e^{x^2}\,dx$.

*Løsning*

$$\int x\,e^{x^2}\,dx = \int e^u \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

■

EKSEMPEL *Lineær kjerne*

Regn ut $\int \dfrac{1}{2x+3}\,dx$ for $x > -\dfrac{3}{2}$.

*Løsning*

$$\int \frac{1}{2x+3}\,dx = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(2x+3) + C$$

■

EKSEMPEL *Logaritme og brøk*

Regn ut $\int \dfrac{\ln x}{x}\,dx$ for $x > 0$.

*Løsning*

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

■

EKSEMPEL *Bestemt integral*

Regn ut $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

*Løsning*

Med $u = 1+x^2$ er $du = 2x\,dx$, så $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,du$.

Grensene er $u = 1$ og $u = 2$:

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) \approx 0{,}61$$

■

**2.103** Regn ut

a) $\int 3x^2\left(x^3+1\right)^4 dx$

b) $\int x\left(x^2+1\right)^2 dx$

**2.104** Regn ut $\int_0^1 2x\left(x^2+3\right)^2 dx$.

**2.105** Regn ut

a) $\int x\,e^{x^2}\,dx$

b) $\int e^{3x+1}\,dx$

c) $\int \dfrac{e^x}{1+e^x}\,dx$

**2.106** Regn ut $\int_0^1 \dfrac{1}{(3x+1)^2}\,dx$.

**2.107** Regn ut $\int_0^2 \dfrac{1}{2x+1}\,dx$.

**2.108** Regn ut

a) $\int \dfrac{x}{x^2+1}\,dx$

b) $\int_0^1 \dfrac{x}{x^2+1}\,dx$

**2.109** Regn ut $\int_1^e \dfrac{\ln x}{x}\,dx$.

**2.110** Regn ut $\int_0^1 (2x+1)\,e^{x^2+x}\,dx$.

**2.111** Regn ut $\int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

**2.112** Regn ut $\int_1^2 x(x-1)^5\,dx$ ved å sette $u = x-1$.

**2.113** Kari regner $\int x^2\,e^{x^3}\,dx = e^{x^3} + C$. Hva er feil, og hva er riktig?

**2.114** Hva blir utskriften?

*Python*

```
F = lambda x: (x**2 + 1)**3 / 6
print(round(F(1) - F(0), 3))
```

Hvilket integral regner programmet ut?

**2.115** Vis at $\int f(ax+b)\,dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$ når $F' = f$ og $a \neq 0$.

**2.116** Forklar hvorfor substitusjon ikke fungerer på $\int e^{x^2}\,dx$ med $u = x^2$.

## 2.5.2 Delvis integrasjon

EKSEMPEL *Polynom ganger eksponentialfunksjon*

Regn ut $\int x\,e^x\,dx$.

*Løsning*

Med $u = x$ og $v' = e^x$ er $u' = 1$ og $v = e^x$:

$$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int 1\cdot e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

Kontroll: $((x-1)e^x)' = e^x + (x-1)e^x = x\,e^x$.

■

EKSEMPEL *Logaritme ganger potens*

Regn ut $\int x\ln x\,dx$ for $x > 0$.

*Løsning*

Med $u = \ln x$ og $v' = x$ er $u' = \dfrac{1}{x}$ og $v = \dfrac{x^2}{2}$:

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

■

EKSEMPEL *Integralet av ln x*

Regn ut $\int \ln x \, dx$ for $x > 0$.

*Løsning*

Med $u = \ln x$ og $v' = 1$ er $u' = \frac{1}{x}$ og $v = x$:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \ln x - x + C$$

EKSEMPEL *Bestemt integral*

Regn ut $\int_0^1 x e^{-x} \, dx$.

*Løsning*

$$\int_0^1 x e^{-x} \, dx = \left[ -x e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} \, dx = -e^{-1} + \left[ -e^{-x} \right]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e} \approx 0{,}264$$

EKSEMPEL *To ganger*

Regn ut $\int x^2 e^x \, dx$.

*Løsning*

Første runde, $u = x^2$ og $v' = e^x$:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx$$

Fra forrige eksempel er $\int x e^x \, dx = (x-1)e^x$, så

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2(x-1)e^x + C = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x + C$$

**2.117** Regn ut $\int x e^x \, dx$ med delvis integrasjon.

**2.118** Regn ut

a) $\int x e^{2x} \, dx$

b) $\int x e^{-x} \, dx$

**2.119** Regn ut $\int x \ln x \, dx$ for $x > 0$.

**2.120** Regn ut $\int \ln x \, dx$ for $x > 0$.

**2.121** Regn ut $\int_0^1 x e^x \, dx$.

**2.122** Regn ut $\int_1^e \ln x \, dx$.

**2.123** Regn ut $\int_1^e x \ln x \, dx$.

**2.124** Regn ut $\int_0^1 x e^{-x} \, dx$.

**2.125** Regn ut $\int x^2 e^x \, dx$ ved å bruke delvis integrasjon to ganger.

**2.126** Regn ut $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$.

**2.127** Regn ut $\int x^2 \ln x \, dx$ for $x > 0$.

**2.128** Regn ut $\int (x+1)e^x \, dx$.

**2.129** Hva er feil? Kari regner $\int x \ln x \, dx$ med $u = x$ og $v' = \ln x$.

**2.130** Hva blir utskriften?

*Python*

```
from math import exp
F = lambda x: (x - 1) * exp(x)
print(round(F(2) - F(1), 3))
```

Hvilket integral regner programmet ut?

**2.131** Utled formelen $\int u v' \, dx = uv - \int u' v \, dx$ fra produktregelen.

## 2.5.3 Delbrøkoppspalting

EKSEMPEL *Én faktor av gangen*

Spalt $\frac{3x+5}{(x+1)(x+2)}$ i delbrøker og regn ut $\int \frac{3x+5}{(x+1)(x+2)} \, dx$.

*Løsning*

Ganger vi med fellesnevneren, får vi $3x + 5 = A(x+2) + B(x+1)$.

Setter vi $x = -1$, forsvinner B-leddet: $2 = A \cdot 1$, så $A = 2$.

Setter vi $x = -2$, forsvinner A-leddet: $-1 = B \cdot (-1)$, så $B = 1$.

Kontroll med $x = 0$: Venstresiden er $\frac{5}{2}$, og høyresiden er $\frac{2}{1} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Integralet er

$$\int \frac{3x+5}{(x+1)(x+2)} \, dx = \int \left( \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+2} \right) dx = 2\ln|x+1| + \ln|x+2| + C$$

EKSEMPEL *Faktorisere nevneren*

Regn ut $\int \frac{1}{x^2-1} \, dx$.

*Løsning*

$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ gir $1 = A(x+1) + B(x-1)$. Med $x = 1$ er $1 = 2A$, så $A = \frac{1}{2}$. Med $x = -1$ er $1 = -2B$, så $B = -\frac{1}{2}$.

$$\int \frac{1}{x^2-1} \, dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

EKSEMPEL *Nevner av andre grad*

Regn ut $\int \frac{x+7}{x^2-x-6} \, dx$.

*Løsning*

$\frac{x+7}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$ gir $x + 7 = A(x+2) + B(x-3)$. Med $x = 3$ er $10 = 5A$, så $A = 2$. Med $x = -2$ er $5 = -5B$, så $B = -1$.

$$\int \frac{x+7}{x^2-x-6} \, dx = 2\ln|x-3| - \ln|x+2| + C$$

EKSEMPEL *Telleren er for stor*

Regn ut $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$.

*Løsning*

Fra $x^2 = (x+1)(x-1)+1$ får vi

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

Da er

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2\right) - 0 = \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0{,}19$$

■

**2.132** Spalt i delbrøker.

a) $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$

b) $\frac{5x+1}{(x+1)(x-2)}$

**2.133** Regn ut $\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$.

**2.134** Regn ut $\int \frac{3x+5}{(x+1)(x+2)}\,dx$.

**2.135** Regn ut $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dx$.

**2.136** Regn ut $\int \frac{x+7}{x^2-x-6}\,dx$.

**2.137** Faktoriser nevneren og regn ut $\int \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\,dx$.

**2.138** Gjør polynomdivisjon og regn ut $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$.

**2.139** Regn ut $\int_1^2 \frac{x}{x+1}\,dx$.

**2.140** Regn ut $\int \frac{x^2+1}{x+1}\,dx$ for $x > -1$.

**2.141** Regn ut $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx$.

**2.142** Hva er feil? Kari skriver $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$.

**2.143** Hva blir utskriften?

*Python*

```
from math import log
F = lambda x: log(x - 1) - log(x + 1)
print(round(F(3) - F(2), 3))
```

Hvilket integral er det, og hva er svaret uten avrunding?

**2.144** Vis at $\frac{1}{P(1-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{1-P}$.

**2.145** Regn ut $\int_{0,2}^{0,5} \frac{1}{P(1-P)}\,dP$.

**2.146** Forklar hvorfor vi først må gjøre polynomdivisjon i $\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$.

## 2.6.1 Volum av omdreiningslegemer

EKSEMPEL *Kjeglen*

Grafen til $f(x) = x$ fra $x = 0$ til $x = 3$ dreies rundt x-aksen. Finn volumet, og sammenlign med formelen for volumet av en kjegle, $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

*Løsning*

$$V = \pi \int_0^3 x^2\,dx = \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9\pi \approx 28{,}3$$

Kjeglevolumet er $\frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 9\pi$. Det stemmer.

■

EKSEMPEL *Kvadratrot*

Grafen til $f(x) = \sqrt{x}$ fra $x = 0$ til $x = 4$ dreies rundt x-aksen. Finn volumet.

*Løsning*

$$V = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi \approx 25{,}1$$

■

EKSEMPEL *Kula*

Vis at volumet av en kule med radius r er $\frac{4}{3}\pi r^3$.

*Løsning*

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right)dx = \pi\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \pi\left(\frac{2r^3}{3} + \frac{2r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

■

■

EKSEMPEL *Legeme med hull*

Området mellom $f(x) = x$ og $g(x) = x^2$ fra $x = 0$ til $x = 1$ dreies rundt x-aksen. Finn volumet.

*Løsning*

$$V = \pi \int_0^1 \left(x^2 - x^4\right)dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2\pi}{15} \approx 0{,}42$$

Husk at vi kvadrerer funksjonene først: Volumet er ikke $\pi \int (f-g)^2$.

■

EKSEMPEL *Eksponentialfunksjon*

Grafen til $f(x) = e^x$ fra $x = 0$ til $x = 1$ dreies rundt x-aksen. Finn volumet.

*Løsning*

$$V = \pi \int_0^1 e^{2x}\,dx = \pi\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi\left(e^2 - 1\right)}{2} \approx 10{,}04$$

■

**2.147** Grafen til $f(x) = 3$ fra $x = 0$ til $x = 4$ dreies rundt x-aksen. Hvilket legeme dannes, og hva er volumet?

**2.148** Finn volumet når grafen til $f(x) = x$ fra 0 til 3 dreies rundt x-aksen, og kontroller med kjegleformelen.

**2.149** Finn volumet når $f(x) = 2x$ fra 0 til 3 dreies rundt x-aksen.

**2.150** Finn volumet når $f(x) = \sqrt{x}$ fra 0 til 9 dreies rundt x-aksen.

**2.151** Finn volumet når $f(x) = x^2$ fra 0 til 2 dreies rundt x-aksen.

**2.152** Finn volumet når $f(x) = \dfrac{1}{x}$ fra 1 til 2 dreies rundt x-aksen.

**2.153** Finn volumet når $f(x) = e^{-x}$ fra 0 til 1 dreies rundt x-aksen.

**2.154** Området mellom $y = \sqrt{x}$ og $y = x$ fra $x = 0$ til $x = 1$ dreies rundt x-aksen. Finn volumet.

**2.155** Området mellom $y = 3$ og $y = 1$ fra $x = 0$ til $x = 2$ dreies rundt x-aksen. Hvilket legeme er det, og hva er volumet?

**2.156** Området mellom $y = 4$ og $y = x^2$ fra $x = 0$ til $x = 2$ dreies rundt x-aksen. Finn volumet.

**2.157** Finn volumet av en kule med radius 2 ved å dreie $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ om x-aksen.

**2.158** Finn volumet av en avkortet kjegle når $f(x) = x$ fra $x = 1$ til $x = 3$ dreies om x-aksen.

**2.159** Hva blir utskriften?

*Python*

```
from math import pi
dx = 1
v = 0
for i in range(2):
    x = (i + 0.5) * dx
    v = v + pi * x**2 * dx
print(round(v, 3))
```

**2.160** Forklar hvorfor volumet av området mellom to grafer er $\pi\int(f^2 - g^2)\,dx$ og ikke $\pi\int(f - g)^2\,dx$.

**2.161** Vis at volumet av en kjegle med radius r og høyde h er $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ved å dreie linja $y = \frac{r}{h}x$ fra $x = 0$ til $x = h$.

## 2.6.2 Overflate og andre volum

EKSEMPEL *Pyramide*

En pyramide har kvadratisk grunnflate med side 6 og høyde 4. I høyden x over spissen er tverrsnittet et kvadrat. Finn volumet.

*Løsning*

Tverrsnittet har areal $A(x) = (1{,}5\,x)^2 = 2{,}25\,x^2$. Volumet er

$$V = \int_0^4 2{,}25\,x^2\,dx = 2{,}25\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 2{,}25 \cdot \frac{64}{3} = 48$$

Det stemmer med formelen $\frac{1}{3} \cdot \text{grunnflate} \cdot \text{høyde} = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48$. ■

EKSEMPEL *Kvadratiske tverrsnitt*

Grunnflaten til et legeme er området mellom x-aksen og $y = \sqrt{4 - x^2}$. Tverrsnittene vinkelrett på x-aksen er kvadrater som står på grunnflaten. Finn volumet.

*Løsning*

$A(x) = \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 = 4 - x^2$, så

$$V = \int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$$

■

EKSEMPEL *Lengden av en rett linje*

Finn lengden av grafen til $f(x) = x$ fra 0 til 2.

*Løsning*

$L = \int_0^2 \sqrt{1 + 1}\,dx = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$. Det er lengden av diagonalen i et kvadrat med side 2. ■

EKSEMPEL *Kjegleflaten*

Grafen til $f(x) = x$ fra 0 til 3 dreies rundt x-aksen. Finn overflaten, og sammenlign med $\pi rl$.

*Løsning*

$$O = 2\pi\int_0^3 x\sqrt{2}\,dx = 2\sqrt{2}\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 9\sqrt{2}\pi \approx 39{,}99$$

Formelen for kjegleflaten er $\pi rl = \pi \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}\pi$. Det stemmer. ■

EKSEMPEL *Overflaten til en kule*

Vis at overflaten til en kule med radius r er $4\pi r^2$.

*Løsning*

Den deriverte er $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, så

$$1 + f'(x)^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

Da er $f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r$, og

$$O = 2\pi\int_{-r}^{r} r\,dx = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2. \qquad \blacksquare$$

■

EKSEMPEL *Overflate med substitusjon*

Grafen til $f(x) = \sqrt{x}$ fra 0 til 1 dreies rundt x-aksen. Finn overflaten.

*Løsning*

Vi har $1 + f'(x)^2 = 1 + \frac{1}{4x}$, så $\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} = \sqrt{x + \frac{1}{4}}$. Da er

$$O = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\,dx = 2\pi \left[ \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{4}\right)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}\left(\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2} - \frac{1}{8}\right) \approx 5{,}33$$

■

**2.162** En pyramide har kvadratisk grunnflate med side 3 og høyde 5. Finn volumet ved å integrere tverrsnittene.

**2.163** Et legeme har tverrsnittsareal $A(x) = x^2$ for $0 \leqslant x \leqslant 3$. Finn volumet.

**2.164** Grunnflaten til et legeme er området mellom $x$-aksen og $y = x$ for $0 \leqslant x \leqslant 2$. Tverrsnittene vinkelrett på $x$-aksen er kvadrater som står på grunnflaten. Finn volumet.

**2.165** Grunnflaten er området mellom $x$-aksen og $y = \sqrt{x}$ for $0 \leqslant x \leqslant 4$. Tverrsnittene vinkelrett på $x$-aksen er halvsirkler med diameter på grunnflaten. Finn volumet.

**2.166** Finn lengden av grafen til $f(x) = \frac{3}{4}x$ fra $x = 0$ til $x = 4$.

**2.167** Finn lengden av grafen til $f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ fra $x = 0$ til $x = 3$.

**2.168** Grafen til $f(x) = 2$ fra $x = 0$ til $x = 5$ dreies rundt $x$-aksen. Finn overflaten (sylinderflaten), og kontroller med $2\pi rh$.

**2.169** Grafen til $f(x) = x$ fra $x = 0$ til $x = 4$ dreies rundt $x$-aksen. Finn overflaten.

**2.170** Finn overflaten til en kule med radius 5, og overflaten til en halvkule med radius 2 (kun den krumme flaten).

**2.171** Et kuleskall har ytre radius 5 og indre radius 3. Finn volumet.

**2.172** Hva blir utskriften?

*Python*

```
from math import sqrt
dx = 1
L = 0
for i in range(2):
    L = L + sqrt(1 + 1**2) * dx
print(round(L, 3))
```

Hvilken kurve har denne lengden?

**2.173** Forklar hvorfor en liten kurvebit har lengde $\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$.

**2.174** Vis at lengden av grafen til en rett linje $f(x) = mx$ fra $a$ til $b$ er $(b - a)\sqrt{1 + m^2}$, og at det stemmer med avstandsformelen.

**2.175** Vis at sideflaten til en sylinder med radius $r$ og høyde $h$ er $2\pi rh$ ved å dreie $f(x) = r$ fra 0 til $h$.

**2.176** Forklar hvorfor overflateformelen har faktoren $2\pi f(x)$.

# Fasit

## 2.1.1 Areal som grense av summer

**2.1**
$\Delta x = \frac{5-1}{8} = 0{,}5$, og $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = 2$.

**2.2**
$\Delta x = 0{,}5$. $V_4 = 0{,}5 \cdot (0+1+2+3) = 3$ og $H_4 = 0{,}5 \cdot (1+2+3+4) = 5$. Det riktige arealet er 4.

**2.3**
$\Delta x = 0{,}5$. $V_4 = 0{,}5 \cdot (0 + 0{,}25 + 1 + 2{,}25) = 1{,}75$ og $H_4 = 0{,}5 \cdot (0{,}25 + 1 + 2{,}25 + 4) = 3{,}75$.

**2.4**
$\Delta x = 1$. Midtpunktene er 0,5 og 1,5, så $M_2 = 1 \cdot (0{,}25 + 2{,}25) = 2{,}5$.

**2.5**
$\Delta x = 0{,}5$. $V_4 = 0{,}5 \cdot (4 + 3{,}75 + 3 + 1{,}75) = 6{,}25$ og $H_4 = 0{,}5 \cdot (3{,}75 + 3 + 1{,}75 + 0) = 4{,}25$. Funksjonen er avtakende, så $H_4$ er undersummen.

**2.6**
I hvert delintervall er funksjonsverdien i venstre endepunkt den minste, siden funksjonen vokser. Rektanglene ligger da under grafen, og summen blir mindre enn arealet.

**2.7**
$\Delta x = 1$. $V_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \approx 1{,}83$ og $H_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} \approx 1{,}08$.

**2.8**
$V_3 = 2 \cdot (0 + 6 + 10) = 32$ m. Hvert ledd er (fart) · (tid), altså en strekning, og summen er en undersum for strekningen siden farten vokser.

**2.9**
$H_n - V_n = \Delta x \cdot (f(4) - f(0)) = \frac{4}{n} \cdot 4 = \frac{16}{n}$. Kravet $\frac{16}{n} < 0{,}1$ gir $n > 160$, så minst 161 rektangler.

**2.10**
2.5. Programmet regner ut høyresummen $H_4$ for $f(x) = x$ på $[0, 2]$: $0{,}5 \cdot (0{,}5 + 1 + 1{,}5 + 2) = 2{,}5$. Det riktige arealet er 2.

**2.11**

```
n = 4
dx = 1 / n
s = 0
for i in range(n):
    x = (i + 0.5) * dx
    s = s + x**2 * dx
print(s)
```

Utskriften er 0,328125.

**2.12**
Med $\Delta x = \frac{2}{n}$ og $x_k = \frac{2k}{n}$ er $H_n = \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)}{n} = 2 + \frac{2}{n}$. Når $n \to \infty$ går $H_n$ mot 2 (arealet av trekanten).

**2.13**
Med $\Delta x = \frac{3}{n}$ og $x_k = \frac{3k}{n}$ er $H_n = \frac{3}{n} \cdot \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2}$. Når $n \to \infty$ går det mot $\frac{9 \cdot 2}{2} = 9$.

**2.14**
For konstante funksjoner: $f(x) = c$, siden alle funksjonsverdiene er like. Da er begge summene $c \cdot (b - a)$, som er arealet av rektangelet.

## 2.1.2 Bestemt integral

**2.15**
a) Rektangel: $4 \cdot 5 = 20$
b) Trekant: $\frac{4 \cdot 12}{2} = 24$
c) Trapes med sider $f(1) = 1$ og $f(4) = 7$ og bredde 3: $\frac{(1+7) \cdot 3}{2} = 12$

**2.16**
Fra $-1$ til 0: $-\frac{1}{2}$. Fra 0 til 2: $+2$. Summen er 1,5.

**2.17**
Halvsirkel med radius 5: $\frac{\pi \cdot 25}{2} = \frac{25\pi}{2} \approx 39{,}27$.

**2.18**
Grafen er en trekant med grunnlinje 4 og høyde $f(0) = 2$: $\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$.

**2.19**
Fra 0 til 3 er arealet under aksen: $-\frac{3 \cdot 3}{2} = -4{,}5$. Fra 3 til 6 er det over: $+4{,}5$. Integralet er 0.

**2.20**
a) 14
b) $3 \cdot 9 - 2 \cdot 5 = 17$
c) $-9$

**2.21**
$\int_0^7 f = 3 - 1 + 4 = 6$ og $\int_2^7 f = -1 + 4 = 3$.

**2.22**
$\int_0^3 x\,dx + \int_0^3 2\,dx = 4{,}5 + 6 = 10{,}5$.

**2.23**
Strekningen er arealet av trekanten: $\frac{8 \cdot 24}{2} = 96$ m.

**2.24**
$\int_0^{10} r(t)\,dt = 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 30$ liter.

**2.25**
$\int_0^2 v\,dt = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$: ballen stiger 4 m.
$\int_0^4 v\,dt = 4 - 4 = 0$: ballen er tilbake på startstedet etter 4 s.

**2.26**
4.0. Programmet regner ut midtpunktsummen for $f(x) = 2x$ på $[0, 2]$, som er $\int_0^2 2x\,dx = 4$.

**2.27**

```
a, b, n = 0, 2, 1000
dx = (b - a) / n
s = 0
for i in range(n):
    x = a + (i + 0.5) * dx
    s = s + x**3 * dx
print(round(s, 3))
```

Utskriften er 4,0.

**2.28**
Hvert ledd $f(x_i) \cdot \Delta x$ i summen er et produkt av to ikke-negative tall, så alle summene er $\geqslant 0$, og dermed også grensen.

## 2.2.1 Numeriske metoder for integral

**2.29**
$\Delta x = 0{,}5$. $T_4 = 0{,}5 \cdot \left[\frac{0}{2} + 1 + 2 + 3 + \frac{4}{2}\right] = 4$. Det riktige arealet er 4.
Trapessummen er eksakt for rette linjer.

**2.30**
$\Delta x = 0{,}5$. $T_4 = 0{,}5 \cdot \left[\frac{0}{2} + 0{,}25 + 1 + 2{,}25 + \frac{4}{2}\right] = 0{,}5 \cdot 5{,}5 = 2{,}75$.

**2.31**
Midtpunktene er 0,25, 0,75, 1,25 og 1,75. $M_4 = 0{,}5 \cdot (0{,}0625 + 0{,}5625 + 1{,}5625 + 3{,}0625) = 2{,}625$. Feilen er $-0{,}042$ for $M_4$ og $+0{,}083$ for $T_4$.

**2.32**
$\Delta x = 1$. $T_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{35}{24} \approx 1{,}458$.

**2.33**
Midtpunktene er 1,5, 2,5 og 3,5. $M_3 = \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{2{,}5} + \frac{1}{3{,}5} \approx 1{,}352$. Feilen er $-0{,}034$ for $M_3$ og $+0{,}072$ for $T_3$, så midtpunktsummen er nærmest.

**2.34**
Når $n$ dobles, blir feilen fire ganger mindre. Fra 10 til 40 er $n$ doblet to ganger, så feilen blir $\frac{0{,}0008}{16} = 0{,}00005$.

**2.35**
Under en rett linje er arealet over hvert delintervall nøyaktig et trapes, så trapessummen er lik arealet.

**2.36**
Grafen til $x^2$ krummer oppover, så den rette linja mellom to punkter på grafen ligger over grafen. Trapesene blir derfor litt for store.

**2.37**
$\Delta t = 2$. $T_4 = 2 \cdot \left[\frac{0}{2} + 3 + 8 + 10 + \frac{11}{2}\right] = 2 \cdot 26{,}5 = 53$ m.

**2.38**
`0.21875`. Det er venstresummen $V_4$ for $f(x) = x^2$ på $[0, 1]$.

**2.39**
`1.896`. Endepunktene $\sin 0 = 0$ og $\sin \pi = 0$ bidrar ikke, så programmet regner ut trapessummen $T_4$ for $\int_0^\pi \sin x \, dx$. Det riktige svaret er 2.

**2.40**

```
from math import sin, pi

def trapes(f, a, b, n):
    dx = (b - a) / n
    s = (f(a) + f(b)) / 2
    for i in range(1, n):
        s = s + f(a + i*dx)
    return dx * s

n = 1
gammel = trapes(sin, 0, pi, n)
while True:
    n = 2 * n
    ny = trapes(sin, 0, pi, n)
    if abs(ny - gammel) < 1e-4:
        break
    gammel = ny
print(round(ny, 3))
```

Svaret er 2,0.

**2.41**
Midtpunktrektangelet «skjærer» grafen: Det ligger over grafen i den ene halvdelen og under i den andre. Fordi grafen krummer oppover, er den delen som mangler på den ene siden større enn den som er for mye på den andre, så summen er litt for liten. Trapesene ligger helt over grafen, så trapessummen er for stor.

**2.42**
$M_1 = 2 \cdot 1^3 = 2$ og $T_1 = 2 \cdot \frac{0+8}{2} = 8$. $S_2 = \frac{2 \cdot 2 + 8}{3} = 4$, som er det riktige svaret. Simpsons metode er eksakt for alle tredjegradsfunksjoner.

### 2.3.1 Areal under og mellom grafer

**2.43**
$\int_0^2 2x \, dx$ er en trekant med grunnlinje 2 og høyde 4: $\frac{2 \cdot 4}{2} = 4$.

**2.44**
Differansen er $x + 1$. Det er et trapes med parallelle sider 1 og 4 og bredde 3: $\frac{(1+4) \cdot 3}{2} = 7{,}5$.

**2.45**
$\int_0^1 (x - x^2) \, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

**2.46**
$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

**2.47**
Skjæringspunktene er $x = 0$ og $x = 1$, og $\sqrt{x} \geqslant x^2$ mellom dem. Arealet er $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

**2.48**
Fra 0 til $\pi$ er arealet 2, og fra $\pi$ til $2\pi$ er det også 2. Totalt 4.

**2.49**
Integralet er $-2 + 2 = 0$. Arealet er $2 + 2 = 4$. Integralet lar positive og negative bidrag oppheve hverandre, mens arealet teller begge positivt.

**2.50**
Fra 0 til $\frac{\pi}{2}$ er arealet $2 \cdot 1 = 2$. Fra $\frac{\pi}{2}$ til $\pi$ ligger grafen under aksen, og arealet er også 2. Totalt 4.

**2.51**
Det er en sirkel med radius 3: $\pi \cdot 3^2 = 9\pi \approx 28{,}27$.

**2.52**
$x^2 = x + 2$ gir $x^2 - x - 2 = 0$, altså $(x-2)(x+1) = 0$, så $x = -1$ og $x = 2$.

**2.53**
For $x = 0$ er $x + 2 = 2 > 0 = x^2$, så linja ligger øverst. Arealet er $\int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right) dx$.

**2.54**
Rektangelet har areal 8, halvsirkelen $\frac{\pi \cdot 4}{2} = 2\pi$, så området har areal $8 - 2\pi \approx 1{,}72$.

**2.55**
`1.5`. Programmet regner ut arealet mellom $y = 2x$ og $y = x^2$ på $[0, 2]$ med to rektangler. Det riktige arealet er $\frac{4}{3}$.

**2.56**
I hver smal stripe er høyden på området øverste funksjonsverdi minus nederste. Da blir hvert ledd i summen positivt, og integralet gir arealet. Byttes de om, blir svaret negativt.

**2.57**
Funksjonen er negativ på $(0, 2)$ og positiv på $(2, 3)$. Integralet er $-\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0$, og arealet er $\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$.

### 2.3.2 Integral i praktiske situasjoner

**2.58**
Arealet av trekanten: $\frac{5 \cdot 20}{2} = 50$ m.

**2.59**
Farten er positiv for $t < 4$: trekant med areal $\frac{4 \cdot 8}{2} = 16$. Den er negativ for $4 < t < 6$: trekant med areal $\frac{2 \cdot 4}{2} = 4$. Forflytningen er $16 - 4 = 12$ m, og den totale strekningen er $16 + 4 = 20$ m.

**2.60**
$5 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 20 + 18 = 38$ liter.

**2.61**
$1{,}5 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot 6 = 6 + 3 = 9$ kWh.

**2.62**
Trapes med parallelle sider $f(0) = 5$ og $f(3) = 11$ og bredde 3: $\dfrac{(5+11)\cdot 3}{2} =$ 24 liter.

**2.63**
Integralet er trapesarealet $\dfrac{(1+9)\cdot 4}{2} =$ 20, så $\bar{f} = \dfrac{20}{4} = 5$.

**2.64**
$\dfrac{1}{1-0} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$

**2.65**
Gjennomsnittsfarten er $\dfrac{0+20}{2} = 10$ m/s. Strekningen er $10 \cdot 10 = 100$ m.

**2.66**
$T_4 = 5 \cdot \left[\dfrac{0}{2} + 3 + 7 + 9 + \dfrac{10}{2}\right] = 5 \cdot 24 = 120$ m.

**2.67**
$T_4 = 1 \cdot \left[\dfrac{0}{2} + 3 + 6 + 4 + \dfrac{2}{2}\right] = 14$ m³.

**2.68**
Enheten er $\dfrac{\text{kg}}{\text{dag}} \cdot \text{dag} = \text{kg}$. Tallet er den samlede mengden (massen) i løpet av 30 dager.

**2.69**
Forflytningen er $3 + (-5) = -2$. Den totale strekningen er $3 + 5 = 8$.

**2.70**
54. Programmet regner ut midtpunktsummen for $\int_0^6 3t\,dt = 54$.

**2.71**
2.0. Programmet regner ut gjennomsnittsverdien til $2x$ på $[0, 2]$ som gjennomsnittet av funksjonsverdiene i midtpunktene.

**2.72**
Området under grafen er et trapes med areal $\dfrac{f(a)+f(b)}{2} \cdot (b-a)$. Deler vi på $b-a$, får vi $\bar{f} = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$. ■

**2.73**
Er $m \leqslant f(x) \leqslant M$ på $[a, b]$, ligger området under grafen mellom et rektangel med høyde $m$ og et med høyde $M$. Arealet er derfor mellom $m(b-a)$ og $M(b-a)$, og gjennomsnittet mellom $m$ og $M$.

### 2.4.1 Antiderivert og ubestemt integral

**2.74**
$x^4 - 2x^3 + 2x + C$

**2.75**
a) $\dfrac{x^6}{6} + C$

b) $-\dfrac{1}{2x^2} + C$

c) $\dfrac{x^6}{6} + \ln x + C$

**2.76**
a) $\dfrac{2}{3}x^{3/2} + C$

b) $\int x^{-1/2}\,dx = 2x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$

**2.77**
a) $\dfrac{3}{2}e^{2x} + C$

b) $-\dfrac{1}{3}e^{-3x} + C$

c) $\dfrac{2^x}{\ln 2} + C$

**2.78**
$\int\left(x^2 + 2x + 1\right)dx = \dfrac{x^3}{3} + x^2 + x + C$

**2.79**
$\dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$, så integralet er $\dfrac{x^2}{2} + \ln x + C$.

**2.80**
$(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$, så integralet er $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x + C$.

**2.81**
$F(x) = 2x^2 - 3x + C$. Fra $F(1) = 2 - 3 + C = 2$ får vi $C = 3$. Altså $F(x) = 2x^2 - 3x + 3$.

**2.82**
$s(t) = t^3 - t^2 + C$, og $s(0) = 5$ gir $C = 5$. Altså $s(t) = t^3 - t^2 + 5$ og $s(2) = 8 - 4 + 5 = 9$ m.

**2.83**
$F(x) = \ln x + C$ for $x > 0$. Fra $F(1) = 0 + C = 3$ får vi $C = 3$. Altså $F(x) = \ln x + 3$.

**2.84**
Med produktregelen er $F'(x) = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$. ■

**2.85**
Han har glemt å dele på den nye eksponenten og å legge til C. Riktig er $\dfrac{x^3}{3} + C$.

**2.86**
15. Siden $F' = f$, er $F(2) - F(1)$ arealet under $f$ fra 1 til 2.

**2.87**
$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. En funksjon med derivert lik 0 i et intervall er konstant. ■

**2.88**
Potensregelen gir $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, men for $n = -1$ blir nevneren 0. Antideriverten til $\dfrac{1}{x}$ er $\ln|x|$, som ikke er en potensfunksjon.

### 2.4.2 Analysens fundamentalteorem

**2.89**
a) $\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9$

b) $\left[x^4\right]_1^2 = 16 - 1 = 15$

c) $\left[x^3 - x^2\right]_{-1}^2 = (8-4) - (-1-1) = 6$

**2.90**
a) $\left[\dfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^9 = \dfrac{2}{3}(27-1) = \dfrac{52}{3}$

b) $\left[-\dfrac{1}{x}\right]_1^4 = -\dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{3}{4}$

c) $\left[\ln x\right]_1^{e^2} = 2 - 0 = 2$

**2.91**
a) $\left[e^x\right]_0^1 = e - 1$

b) $\left[-e^{-x}\right]_0^2 = 1 - e^{-2}$

c) $\left[e^{3x}\right]_0^1 = e^3 - 1$

**2.92**
$\int_0^1 (x - x^3)\,dx = \left[\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4}\right]_0^1 = \dfrac{1}{4}$

**2.93**
Skjæringspunktene er $x = -1$ og $x = 2$. Arealet er $\int_{-1}^2 (x + 2 - x^2)\,dx = \left[\dfrac{x^2}{2} + 2x - \dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 = \dfrac{10}{3} - \left(-\dfrac{7}{6}\right) = \dfrac{9}{2}$.

**2.94**
Nullpunktene er $\pm 2$, og grafen ligger under aksen mellom dem. Arealet er $\int_{-2}^2 (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \dfrac{x^3}{3}\right]_{-2}^2 = \dfrac{16}{3} + \dfrac{16}{3} = \dfrac{32}{3}$.

**2.95**
$x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$ har nullpunkter $-2$, $0$ og $2$. Fra $-2$ til $0$ er $\int (x^3 - 4x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} = 4$. Fra $0$ til $2$ er integralet $-4$, så arealet er $4$. Totalt $8$.

**2.96**
$\int_0^3 (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^3 = 12$, så $\bar{f} = \frac{12}{3} = 4$.

**2.97**
$\left[t^2 - 6t\right]_0^6 = 0$, så forflytningen er $0$. Farten er negativ for $t < 3$: strekningen er $|9 - 18| = 9$ m, og positiv for $t > 3$: $0 - (-9) = 9$ m. Total strekning er $18$ m.

**2.98**
Ifølge analysens fundamentalteorem er svaret $e^{x^2}$.

**2.99**
$\left[\ln t\right]_1^x = \ln x - 0 = \ln x$, og $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

**2.100**
Funksjonen $x^3$ er odde, så grafen er symmetrisk om origo. Arealet over aksen til høyre er like stort som arealet under aksen til venstre, og de opphever hverandre. (Med antiderivert: $\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{2} = 4 - 4 = 0$.)

**2.101**
10. Det er $\int_1^3 (2x+1)\,dx = 10$, siden $F'(x) = 2x + 1$.

**2.102**
Siden $f$ er en antiderivert til $f'$, gir analysens fundamentalteorem $f(b) - f(a)$. Endringen er $\int_0^3 (2t - 4)\,dt = \left[t^2 - 4t\right]_0^3 = 9 - 12 = -3$ grader.

### 2.5.1 Substitusjon

**2.103**
a) $u = x^3 + 1$, $du = 3x^2\,dx$:
$$\frac{(x^3+1)^5}{5} + C$$
b) $u = x^2 + 1$, $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$:
$$\frac{\left(x^2+1\right)^3}{6} + C$$

**2.104**
Med $u = x^2 + 3$ er grensene $3$ og $4$:
$\int_3^4 u^2\,du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_3^4 = \frac{64 - 27}{3} = \frac{37}{3}$.

**2.105**
a) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$
b) $\frac{1}{3}e^{3x+1} + C$
c) $\ln(1 + e^x) + C$

**2.106**
Med $u = 3x + 1$ er $dx = \frac{1}{3}\,du$ og grensene $1$ og $4$: $\frac{1}{3}\int_1^4 u^{-2}\,du = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{u}\right]_1^4 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

**2.107**
$\frac{1}{2}\int_1^5 \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln 5$.

**2.108**
a) $u = x^2 + 1$: $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$
b) $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\ln 2$

**2.109**
$u = \ln x$ med grenser $0$ og $1$:
$\int_0^1 u\,du = \frac{1}{2}$.

**2.110**
$u = x^2 + x$ med $du = (2x+1)\,dx$ og grenser $0$ og $2$: $\int_0^2 e^u\,du = e^2 - 1$.

**2.111**
$\frac{1}{2}\int_1^2 u^{-1/2}\,du = \left[\sqrt{u}\right]_1^2 = \sqrt{2} - 1$.

**2.112**
$x = u + 1$, grenser $0$ og $1$: $\int_0^1 (u^6 + u^5)du = \frac{1}{7} + \frac{1}{6} = \frac{13}{42}$.

**2.113**
Med $u = x^3$ er $x^2\,dx = \frac{1}{3}\,du$. Hun har glemt faktoren $\frac{1}{3}$. Riktig er $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$.

**2.114**
1.167. Det er $\int_0^1 x\left(x^2+1\right)^2 dx = \frac{7}{6}$.

**2.115**
Deriver høyresiden med kjerneregelen:
$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = f(ax+b)$. ■

**2.116**
Med $u = x^2$ er $du = 2x\,dx$, men integranden har ingen faktor $x$. Vi kan ikke skrive om til $u$ uten å ha $x$ igjen, som er $\sqrt{u}$. Integralet har ingen antiderivert som kan skrives med vanlige funksjoner.

### 2.5.2 Delvis integrasjon

**2.117**
Med $u = x$ og $v' = e^x$ får vi $x\,e^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + C$.

**2.118**
a) $\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$
b) $-x\,e^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C$

**2.119**
$\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$

**2.120**
$x\ln x - x + C$

**2.121**
$\left[(x-1)e^x\right]_0^1 = 0 - (-1) = 1$

**2.122**
$\left[x\ln x - x\right]_1^e = 0 - (-1) = 1$

**2.123**
$\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$

**2.124**
$\left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^1 = -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$

**2.125**
$x^2e^x - 2\int x\,e^x\,dx = x^2e^x - 2(x-1)e^x + C = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x + C$

**2.126**
$\left[\left(x^2 - 2x + 2\right)e^x\right]_0^1 = e - 2$

**2.127**
Med $u = \ln x$ og $v' = x^2$ er $v = \frac{x^3}{3}$:
$\frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$.

**2.128**
$\int x\,e^x\,dx + \int e^x\,dx = (x-1)e^x + e^x + C = x\,e^x + C$.

**2.129**
Da trengs $v = \int \ln x\,dx = x\ln x - x$, som er mer innviklet enn det hun startet med. Det er bedre å velge $u = \ln x$ og $v' = x$, siden $\ln x$ blir enklere ved derivasjon.

**2.130**
7.389. Det er $\int_1^2 x\,e^x\,dx = F(2) - F(1) = e^2 - 0 = e^2 \approx 7{,}389$.

**2.131**
Produktregelen gir $(uv)' = u'v + uv'$. Integrerer vi begge sider, får vi $uv = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx$. Flytter vi det første leddet over, får vi formelen. ■

### 2.5.3 Delbrøkoppspalting

**2.132**

a) $1 = A(x+2) + B(x-1)$ gir $A = \frac{1}{3}$ og $B = -\frac{1}{3}$. Altså $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)$.

b) $5x + 1 = A(x-2) + B(x+1)$ gir $x = -1$: $-4 = -3A$, $A = \frac{4}{3}$, og $x = 2$: $11 = 3B$, $B = \frac{11}{3}$.

**2.133**
$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)$, så integralet er $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$.

**2.134**
$2\ln|x+1| + \ln|x+2| + C$

**2.135**
$\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right)$.
Integralet er $\frac{1}{2}\left[\ln\frac{x+1}{x+3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

**2.136**
$2\ln|x-3| - \ln|x+2| + C$

**2.137**
$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$. Fra $2x + 1 = A(x+2) + B(x+1)$: $x = -1$ gir $A = -1$, $x = -2$ gir $B = 3$. Integralet er $-\ln|x+1| + 3\ln|x+2| + C$.

**2.138**
$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$, så integralet er $\left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

**2.139**
$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$, så integralet er $\left[x - \ln(x+1)\right]_1^2 = 1 - \ln\frac{3}{2}$.

**2.140**
$x^2 + 1 = (x+1)(x-1) + 2$, så $\frac{x^2+1}{x+1} = x - 1 + \frac{2}{x+1}$, og integralet er $\frac{x^2}{2} - x + 2\ln(x+1) + C$.

**2.141**
$\frac{1}{2}\left[\ln\frac{x-1}{x+1}\right]_2^3 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

**2.142**
Med $x = 1$ er venstresiden $\frac{1}{2}$ og høyresiden $\frac{3}{2}$. Riktig er $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

**2.143**
0.405. Programmet regner ut $\int_2^3 \frac{2}{x^2-1}\,dx = \ln\frac{3}{2} \approx 0{,}405$.

**2.144**
$\frac{1}{P} + \frac{1}{1-P} = \frac{(1-P)+P}{P(1-P)} = \frac{1}{P(1-P)}$. ■

**2.145**
Antideriverten er $\ln\frac{P}{1-P}$. Svaret er $\ln 1 - \ln\frac{0{,}2}{0{,}8} = -\ln\frac{1}{4} = \ln 4$.

**2.146**
Telleren har høyere grad enn nevneren, og delbrøkoppspalting forutsetter at graden i telleren er lavere. Etter divisjon får vi et polynom pluss en brøk med lavere grad i telleren.

### 2.6.1 Volum av omdreiningslegemer

**2.147**
En sylinder med radius 3 og høyde 4. $V = \pi\int_0^4 9\,dx = 36\pi$.

**2.148**
$V = \pi\int_0^3 x^2\,dx = 9\pi$. Kjegleformelen: $\frac{1}{3}\pi\cdot 3^2\cdot 3 = 9\pi$.

**2.149**
$V = \pi\int_0^3 4x^2\,dx = \pi\left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^3 = 36\pi$

**2.150**
$V = \pi\int_0^9 x\,dx = \pi\cdot\frac{81}{2} = \frac{81\pi}{2}$

**2.151**
$V = \pi\int_0^2 x^4\,dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32\pi}{5}$

**2.152**
$V = \pi\int_1^2 x^{-2}\,dx = \pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \pi\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

**2.153**
$V = \pi\int_0^1 e^{-2x}\,dx = \pi\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-2}\right) \approx 1{,}36$

**2.154**
Fra $x = 0$ til 1 er $\sqrt{x} \geqslant x$. $V = \pi\int_0^1\left(x - x^2\right)dx = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$.

**2.155**
Et rør med ytre radius 3, indre radius 1 og lengde 2. $V = \pi\int_0^2(9-1)dx = 16\pi$.

**2.156**
$V = \pi\int_0^2(16 - x^4)dx = \pi\left(32 - \frac{32}{5}\right) = \frac{128\pi}{5}$

**2.157**
$V = \pi\int_{-2}^2\left(4 - x^2\right)dx = \pi\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2 = \frac{32\pi}{3}$, som stemmer med $\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3$.

**2.158**
$V = \pi\int_1^3 x^2\,dx = \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{26\pi}{3}$

**2.159**
7.854. Programmet bruker to skiver med radius 0,5 og 1,5: $\pi(0{,}25 + 2{,}25) = 2{,}5\,\pi \approx 7{,}854$. Det eksakte volumet av kjeglen er $\frac{8\pi}{3} \approx 8{,}378$.

**2.160**
Skiven har ytre radius $f(x)$ og indre radius $g(x)$. Arealet av en ring er $\pi f^2 - \pi g^2$, ikke $\pi(f-g)^2$. Det kan en se med $f = 3$ og $g = 1$: $\pi(9-1) = 8\pi$, mens $\pi\cdot 2^2 = 4\pi$.

**2.161**
$V = \pi\int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2\,dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. ■

### 2.6.2 Overflate og andre volum

**2.162**
Tverrsnittet i avstand $x$ fra spissen har side $\frac{3}{5}x$ og areal $\frac{9}{25}x^2$. $V = \int_0^5 \frac{9}{25}x^2\,dx = \frac{9}{25}\cdot\frac{125}{3} = 15$.

**2.163**
$V = \int_0^3 x^2\,dx = 9$

**2.164**
$A(x) = x^2$, så $V = \int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}$.

**2.165**
Diameteren er $\sqrt{x}$, så radien er $\frac{\sqrt{x}}{2}$ og arealet er $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{4} = \frac{\pi x}{8}$. $V = \int_0^4 \frac{\pi x}{8}\,dx = \frac{\pi}{8}\cdot 8 = \pi$.

**2.166**
$f'(x) = \frac{3}{4}$, og $\sqrt{1+\frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$. $L = \int_0^4 \frac{5}{4}\,dx = 5$. (Det er hypotenusen i en trekant med sider 3, 4 og 5.)

**2.167**
$f'(x) = x^{1/2}$, så $\sqrt{1+f'^2} = \sqrt{1+x}$. $L = \int_0^3 \sqrt{1+x}\,dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\right]_0^3 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$.

**2.168**
$f' = 0$, så $O = 2\pi\int_0^5 2\,dx = 20\pi$.
Formelen $2\pi rh = 2\pi\cdot 2\cdot 5 = 20\pi$.

**2.169**
$O = 2\pi\int_0^4 x\sqrt{2}\,dx = 2\sqrt{2}\pi\cdot 8 = 16\sqrt{2}\pi \approx 71{,}1$.

**2.170**
Kule: $4\pi\cdot 25 = 100\pi$. Halvkule: $\frac{1}{2}\cdot 4\pi\cdot 4 = 8\pi$.

**2.171**
$V = \frac{4}{3}\pi(5^3 - 3^3) = \frac{392\pi}{3}$

**2.172**
2.828. Det er lengden av grafen til $f(x) = x$ fra 0 til 2: $2\sqrt{2}$.

**2.173**
Over et lite intervall med bredde $dx$ stiger grafen med $dy = f'(x)\,dx$. Etter Pythagoras er lengden av hypotenusen $\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.

**2.174**
$L = \int_a^b \sqrt{1+m^2}\,dx = (b-a)\sqrt{1+m^2}$. Avstanden mellom $(a, ma)$ og $(b, mb)$ er $\sqrt{(b-a)^2+m^2(b-a)^2} = (b-a)\sqrt{1+m^2}$. ■

**2.175**
$O = 2\pi\int_0^h r\sqrt{1+0}\,dx = 2\pi rh$. ■

**2.176**
Et smalt bånd av kurven i avstand $f(x)$ fra aksen blir til en ring med omkrets $2\pi f(x)$. Arealet av ringen er omkretsen ganger bredden $ds$.