1

OPPGAVEHEFTE · MATEMATIKK R2

Følger og rekker

Overskriftene viser til delkapittelene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler. Fasiten står bakerst.

Formelark

FØLGER

Eksplisitt formel

$$a_n = f(n)$$

Rekursiv formel

$$a_1 = \text{start}, \quad a_{n+1} = g(a_n)$$

BEVIS

Partall og oddetall

$$2k \quad \text{og} \quad 2k+1$$

Kontrapositiv påstand

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Induksjon

$$P(1) \text{ og } (P(k) \Rightarrow P(k+1))$$

- Eksempler beviser ikke en påstand, men ett moteksempel avkrefter den.
- Motsigelsesbevis: anta det motsatte og vis en selvmotsigelse.

ARITMETISKE REKKER

Ledd nummer n

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Summen av n ledd

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

GEOMETRISKE REKKER

Ledd nummer n

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$$

Summen av n ledd

$$S_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

Uendelig rekke, $|k| < 1$

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$

- Divergenstesten: Går ikke a_k mot 0, divergerer rekka.
- Den harmoniske rekka divergerer, selv om leddene går mot 0.

SPARING OG LÅN

Sparing med faste innskudd

$$B \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

Terminbeløp, annuitetslån

$$T = L \cdot \frac{k - 1}{1 - k^{-n}}$$

- Vekstfaktoren er $k = 1 + \frac{p}{100}$.
- Serielån: rentene er en aritmetisk rekke.

1.1.1 Følger og rekursive formler

EKSEMPEL *Ledd fra en eksplisitt formel*

En følge er gitt ved $a_n = n^2 + 1$. Finn de fire første leddene og ledd nummer 10.

Løsning

$$a_1 = 1^2 + 1 = 2,$$
$$a_2 = 2^2 + 1 = 5,$$
$$a_3 = 3^2 + 1 = 10,$$
$$a_4 = 4^2 + 1 = 17,$$
$$a_{10} = 10^2 + 1 = 101$$

■

EKSEMPEL *Finn en eksplisitt formel*

Følgen $5, 9, 13, 17, \ldots$ øker med 4 for hvert ledd. Finn en eksplisitt formel for a_n.

Løsning

Siden leddene øker med 4, må formelen ha $4n$ som første del. For $n = 1$ gir $4n$ tallet 4, men $a_1 = 5$, så vi må legge til 1:

$$a_n = 4n + 1$$

Kontroll: $a_4 = 4 \cdot 4 + 1 = 17$. Det stemmer.

■

EKSEMPEL *Ledd fra en rekursiv formel*

En følge er gitt ved $a_1 = 3$ og $a_{n+1} = 2a_n - 1$. Finn de fire første leddene.

Løsning

$$a_1 = 3,$$
$$a_2 = 2 \cdot 3 - 1 = 5,$$
$$a_3 = 2 \cdot 5 - 1 = 9,$$
$$a_4 = 2 \cdot 9 - 1 = 17$$

■

EKSEMPEL *Fibonacci-følgen*

Følgen er gitt ved $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ og $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Finn de seks første leddene.

Løsning

$$1, 1, 1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 2 + 3 = 5, 3 + 5 = 8$$

Følgen $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ kalles **Fibonacci-følgen**. Den dukker opp i naturen, for eksempel i spiralene i en solsikke.

■

1.1 En følge er gitt ved $a_n = 3n + 2$. Finn de fire første leddene.

1.2 En følge er gitt ved $a_n = n^2 - 4n$. Finn a_1, a_2 og a_5.

1.3 En følge er gitt ved $a_n = 2^n$. Finn a_3 og a_8.

1.4 En følge er gitt ved $a_n = n \cdot (-1)^n$. Finn de fem første leddene.

1.5 En følge er gitt ved $a_1 = 4$ og $a_{n+1} = a_n + 6$. Finn a_5.

1.6 En følge er gitt ved $a_1 = 100$ og $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$. Finn de fem første leddene.

1.7 En følge er gitt ved $a_1 = 2$ og $a_{n+1} = a_n^2 - 1$. Finn a_4.

1.8 Finn en eksplisitt formel for følgen $7, 10, 13, 16, \ldots$

1.9 Finn en eksplisitt formel for følgen $3, 6, 12, 24, \ldots$

1.10 Følgen $5, 8, 11, 14, \ldots$ er gitt.

a) Skriv en rekursiv formel.

b) Skriv en eksplisitt formel.

1.11 En følge er gitt ved $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ og $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Finn a_6.

1.12 Du har 1000 kr på en konto og setter inn 250 kr hver måned. La a_n være beløpet etter n måneder.

a) Skriv en rekursiv formel for a_n.

b) Hvor mye er det på kontoen etter 6 måneder?

1.13 En bakteriekultur på 200 bakterier dobles hver time. La a_n være antall bakterier etter n timer.

a) Skriv en eksplisitt formel for a_n.

b) Hvor mange bakterier er det etter 5 timer?

1.14 Kari sier at følgen $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 2$ har $a_5 = 13$. Stemmer det? Forklar.

1.15 Hva blir utskriften?

Python

```
a = 1
for n in range(4):
    a = 2 * a + 3
    print(a)
```

1.16 Skriv et program som skriver ut de seks første leddene i følgen $a_1 = 10$, $a_{n+1} = a_n - 4$.

1.17 Vis at den eksplisitte formelen $a_n = 3n + 2$ og den rekursive formelen $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 3$ gir den samme følgen.

1.1.2 Rekursjon med programmering

1.18 Hva blir utskriften?

Python

```
a = [1]
for n in range(3):
    a.append(a[-1] + 3)
print(a)
```

1.19 Hva blir utskriften?

Python

```
a = 1
ar = 0
while a < 50:
    a = a * 3
    ar = ar + 1
print(ar)
```

1.20 Gitt funksjonen

Python

```
def neste(a):
    return 2 * a + 3
```

Hva er `neste(neste(1))`?

1.21 Hva er `f(5)`?

Python

```
def f(n):
    if n == 1:
        return 1
    return f(n - 1) * n
```

1.22 Skriv en rekursiv funksjon `a(n)` for følgen $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 4$.

1.23 En fiskebestand på 10 000 vokser med 5 % per år, og 400 fisk fanges hvert år: $a_{n+1} = 1{,}05\ a_n - 400$, $a_0 = 10\,000$.

a) Finn a_2.

b) Vokser eller minker bestanden?

1.24 Finn bestanden i forrige oppgave som holder seg konstant, ved å løse $1{,}05\ a - 400 = a$.

1.25 En bil er verdt 200 000 kr og taper 10 % av verdien hvert år. Hva er den verdt etter 3 år?

1.26 Et lån på 100 000 kr har 5 % rente per år, og du betaler 20 000 kr hvert år rett etter at renten er lagt til. Restgjelden følger $a_{n+1} = 1{,}05\ a_n - 20\,000$ med $a_0 = 100\,000$. Finn a_3.

1.27 Du setter inn 1000 kr på en konto hver år. Renten er 2 % per år og legges til rett før hvert nytt innskudd. Med $a_1 = 1000$ og $a_{n+1} = 1{,}02\ a_n + 1000$, finn a_3.

1.28 Skriv et program som finner etter hvor mange hele år et beløp på 10 000 kr med 4 % rente per år er blitt større enn 15 000 kr.

1.29 Hva blir utskriften?

Python

```
a, b = 0, 1
for i in range(6):
    a, b = b, a + b
print(a)
```

1.30 Hva er feil i programmet under, og hva skjer når det kjøres?

Python

```
a = 10
while a > 0:
    print(a)
```

1.31 Hva skjer hvis du kjører `f(3)` med funksjonen under?

Python

```
def f(n):
    return f(n - 1) + 1
```

1.32 En følge starter med $x = 6$. Hvert steg gjør x til $\frac{x}{2}$ hvis x er partall, og til $3x + 1$ hvis x er oddetall. Hvor mange steg trengs for å nå 1?

1.33 Skriv et program som skriver ut de ti første leddene i følgen $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$, og forklar hvilken eksplisitt formel leddene følger.

1.2.1 Direkte bevis

EKSEMPEL *Et moteksempel*

Påstand: «For alle heltall $n \geqslant 0$ er $n^2 + n + 41$ et primtall.» Er påstanden sann?

Løsning

For $n = 0, 1, 2, \ldots, 39$ blir $n^2 + n + 41$ faktisk et primtall, så mange eksempler tyder på at påstanden er sann. Men for $n = 40$ er

$$40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2,$$

og det er ikke et primtall. Dermed er $n = 40$ et moteksempel, og påstanden er usann.

Eksempelet viser at mange eksempler som stemmer, aldri er nok til å bevise en påstand. ▪

EKSEMPEL *Summen av to partall*

Vis at summen av to partall alltid er et partall.

Løsning

La de to partallene være $2a$ og $2b$, der a og b er heltall. Summen er

$$2a + 2b = 2(a + b)$$

Siden $a + b$ er et heltall, er $2(a + b)$ delelig med 2, altså et partall. ■ ▪

EKSEMPEL *Kvadratet av et oddetall*

Vis at kvadratet av et oddetall er et oddetall.

Løsning

La oddetallet være $n = 2k + 1$, der k er et heltall. Da er

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$$

Siden $2k^2 + 2k$ er et heltall, har n^2 formen $2m + 1$ med $m = 2k^2 + 2k$, så n^2 er et oddetall. ■ ▪

EKSEMPEL *En ulikhet*

Vis at $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ for alle reelle tall a og b.

Løsning

Vi regner ut

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$$

Et kvadrat er aldri negativt, så $(a - b)^2 \geqslant 0$. Dermed er $a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0$, altså $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. ■

1.34 Avgjør om påstandene er sanne eller usanne.

a) Summen av et partall og et oddetall er et oddetall.

b) Summen av to primtall er et partall.

c) Produktet av to oddetall er et partall.

1.35 Finn et moteksempel til påstanden «$n^2 > n$ for alle heltall n».

1.36 Finn et moteksempel til påstanden «hvis $a^2 = b^2$, så er $a = b$».

1.37 Hva er det oddetallet $2k + 1$ når $k = -3$?

1.38 Vis at produktet av to oddetall er et oddetall.

1.39 Vis at summen av et partall og et oddetall er et oddetall.

1.40 Vis at produktet av et partall og et vilkårlig heltall er et partall.

1.41 Vis at kvadratet av et partall er delelig med 4.

1.42 Vis at $(n + 1)^2 - n^2$ er et oddetall for alle heltall n.

1.43 Vis at summen av fire påfølgende heltall aldri er delelig med 4.

1.44 Vis at $a^2 + 4 \geqslant 4a$ for alle reelle tall a.

1.45 Vis at $(a + b)^2 \geqslant 4ab$ for alle reelle tall a og b.

1.46 Vis at differansen mellom kvadratene til to påfølgende heltall er summen av heltallene.

1.47 Sara sjekker at $n^2 \geqslant n$ for $n = 1, 2, 3, 4$ og skriver «Dermed er påstanden bevist for alle heltall». Hva er galt?

1.48 Hva blir utskriften?

Python

```
for n in range(1, 6):
    print(n * n + n)
```

Forklar hvorfor alle tallene er partall, ut fra et bevis.

1.49 Vis at hvis n er et oddetall, er $n^2 + n$ et partall.

1.2.2 Kontrapositive bevis og motsigelse

EKSEMPEL *Kontrapositiv eller omvendt?*

Påstand: «Hvis n er delelig med 6, er n delelig med 3.» Skriv den kontrapositive og den omvendte påstanden, og avgjør om de er sanne.

Løsning

Kontrapositiv: «Hvis n ikke er delelig med 3, er n ikke delelig med 6.» Den er sann, fordi påstanden vi startet med er sann.

Omvendt: «Hvis n er delelig med 3, er n delelig med 6.» Den er usann: $n = 3$ er delelig med 3, men ikke med 6.

EKSEMPEL *Kvadratet er partall*

Vis at hvis n^2 er et partall, så er n et partall.

Løsning

Vi viser den kontrapositive: Hvis n er et oddetall, er n^2 et oddetall.

La $n = 2k + 1$. Da er

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\Big(2k^2 + 2k\Big) + 1,$$

som er et oddetall. Den kontrapositive er dermed vist, og derfor er også den opprinnelige påstanden sann. ■

EKSEMPEL *Hvis $3n + 2$ er oddetall*

Vis at hvis $3n + 2$ er et oddetall, så er n et oddetall.

Løsning

Vi viser den kontrapositive: Hvis n er et partall, er $3n + 2$ et partall.

La $n = 2k$. Da er $3n + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$, som er et partall. ■

EKSEMPEL *Det finnes ikke et minste positivt rasjonalt tall*

Vis at det ikke finnes et minste positivt rasjonalt tall.

Løsning

Anta at det finnes et minste positivt rasjonalt tall r. Da er $\frac{r}{2}$ også et positivt rasjonalt tall, og $\frac{r}{2} < r$. Det er en selvmotsigelse, siden r skulle være det minste. Antakelsen var altså gal, og det finnes ikke et minste positivt rasjonalt tall. ■

EKSEMPEL *Kvadratroten av 2 er irrasjonal*

Vis at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en brøk av heltall.

Løsning
Anta at $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, der p og q er heltall uten felles faktor. Kvadrerer vi, får vi $2 = \frac{p^2}{q^2}$, altså

$$p^2 = 2q^2$$

Da er p^2 et partall, og ifølge eksempelet over er også p et partall, $p = 2m$. Setter vi inn, blir $4m^2 = 2q^2$, altså $q^2 = 2m^2$. Da er q^2 et partall, og dermed er q også et partall.

Nå er både p og q partall, så de har felles faktor 2. Det er en selvmotsigelse. Derfor kan ikke $\sqrt{2}$ skrives som en brøk. ■

1.50 Skriv den kontrapositive påstanden til «hvis n er delelig med 10, er n delelig med 5».

1.51 Skriv den omvendte påstanden til «hvis n er delelig med 10, er n delelig med 5», og avgjør om den er sann.

1.52 Skriv den kontrapositive påstanden til «hvis $x > 2$, så er $x^2 > 4$», og avgjør om den er sann.

1.53 Påstanden «hvis det er snø, er det kaldt» er sann. Hvilke av disse følger?

a) Hvis det ikke er kaldt, er det ikke snø.

b) Hvis det er kaldt, er det snø.

1.54 Vis at hvis n^2 er et oddetall, er n et oddetall.

1.55 Vis at hvis $5n + 3$ er et partall, er n et oddetall.

1.56 Vis at hvis $a \cdot b$ er et partall, er minst ett av tallene a og b et partall.

1.57 Vis at hvis $n^2 - 1$ ikke er delelig med 3, er n delelig med 3.

1.58 Vis ved motsigelse at det ikke finnes et største heltall.

1.59 Vis ved motsigelse at det ikke finnes heltall a og b slik at $4a + 8b = 2023$.

1.60 Vis ved motsigelse at produktet rx av et rasjonalt tall $r \neq 0$ og et irrasjonalt tall x er irrasjonalt.

1.61 Vis at $\sqrt{2} + 1$ er irrasjonalt, ved å bruke at $\sqrt{2}$ er irrasjonalt.

1.62 Hvilken metode passer best for å vise «hvis n^2 er delelig med 3, er n delelig med 3»? Begrunn.

1.63 Hva blir utskriften?

Python

```
for n in range(1, 8):
    if n % 2 == 1 and n % 3 == 0:
        print(n)
```

1.64 Vis ved motsigelse at det ikke finnes et positivt heltall n slik at $n < \frac{1}{n}$.

1.2.3 Induksjonsbevis

EKSEMPEL *Summen av de første heltallene*
Vis at $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ for alle naturlige tall n.

Løsning
Grunnlag. For $n = 1$ er venstresiden 1, og høyresiden er $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Formelen stemmer.

Trinn. Anta at formelen gjelder for $n = k$:

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Vi skal vise at den gjelder for $n = k + 1$. Da er

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Det er formelen for $n = k + 1$. Ifølge induksjonsprinsippet gjelder formelen for alle n. ■

EKSEMPEL *Summen av oddetallene*
Vis at $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ for alle $n \geqslant 1$.

Løsning
Grunnlag. For $n = 1$ er venstresiden 1 og høyresiden $1^2 = 1$.

Trinn. Anta at $1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2$. Da er

$$1 + 3 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

Formelen gjelder altså for $n = k + 1$, og dermed for alle n. ■

EKSEMPEL *Delelighet med 6*
Vis at $7^n - 1$ er delelig med 6 for alle $n \geqslant 1$.

Løsning
Grunnlag. For $n = 1$ er $7^1 - 1 = 6$, som er delelig med 6.

Trinn. Anta at $7^k - 1 = 6m$ for et heltall m. Da er

$$7^{k+1} - 1 = 7\left(7^k - 1\right) + 7 - 1 = 7 \cdot 6m + 6 = 6(7m + 1),$$

som er delelig med 6. ■

EKSEMPEL *Rekursiv og eksplisitt formel*

En følge er gitt ved $a_1 = 1$ og $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Vis at $a_n = 2^n - 1$ for alle $n \geqslant 1$.

Løsning

Grunnlag. For $n = 1$ er $a_1 = 1$ og $2^1 - 1 = 1$.

Trinn. Anta at $a_k = 2^k - 1$. Da gir rekursjonsregelen

$$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2\left(2^k - 1\right) + 1 = 2^{k+1} - 1$$

Formelen gjelder for $n = k + 1$, og dermed for alle n. ■

■

1.65 Påstanden P(n) er $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$. Sjekk at P(1), P(2) og P(3) stemmer.

1.66 Hva er induksjonsantakelsen og hva skal vises i trinnet, i et bevis for $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$?

1.67 Vis med induksjon at $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$.

1.68 Vis med induksjon at $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

1.69 Vis med induksjon at $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

1.70 Vis med induksjon at $5^n - 1$ er delelig med 4 for alle $n \geqslant 1$.

1.71 Vis med induksjon at $n^3 - n$ er delelig med 3 for alle $n \geqslant 1$.

1.72 En følge er gitt ved $a_1 = 3$ og $a_{n+1} = a_n + 4$. Vis med induksjon at $a_n = 4n - 1$.

1.73 En følge er gitt ved $a_1 = 2$ og $a_{n+1} = 3a_n$. Vis med induksjon at $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

1.74 Vis med induksjon at $3^n \geqslant 2n + 1$ for alle $n \geqslant 1$.

1.75 Hva er galt med følgende «bevis» for at alle hester har samme farge? «Grunnlag: En hest har samme farge som seg selv. Trinn: Anta at alle i en gruppe på k hester har samme farge. Ta en gruppe på $k + 1$ hester, og fjern én. De k gjenværende har samme farge. Sett den fjernede tilbake og fjern en annen. Også de k gjenværende har samme farge. Da må alle $k + 1$ ha samme farge.»

1.76 Hva blir utskriften?

Python

```
s = 0
for n in range(1, 5):
    s = s + (2 * n - 1)
    print(s)
```

Hvilken formel følger tallene?

1.77 Vis med induksjon at $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

1.78 Vis med induksjon at $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

1.79 Vis med induksjon at $n! \geqslant 2^{n-1}$ for alle $n \geqslant 1$.

1.3.1 Aritmetiske rekker

EKSEMPEL *Regne med summetegnet*

Regn ut $\sum_{k=1}^{4}(2k + 1)$.

Løsning

$$\sum_{k=1}^{4}(2k + 1) = 3 + 5 + 7 + 9 = 24$$

■

EKSEMPEL *Summen av en rekke*

Finn summen $3 + 7 + 11 + \ldots + 43$.

Løsning

Følgen er aritmetisk med $a_1 = 3$ og $d = 4$. Leddet 43 har nummer n der

$$3 + 4(n - 1) = 43 \quad \Rightarrow \quad n - 1 = 10 \quad \Rightarrow \quad n = 11$$

Summen er

$$S_{11} = \frac{11(3 + 43)}{2} = 11 \cdot 23 = 253$$

■

EKSEMPEL *Plassene i en sal*

I en sal er det 12 seter i første rad, og hver rad har 2 seter mer enn den foran. Det er 20 rader. Hvor mange seter er det i salen?

Løsning

Antall seter i rad n er $a_n = 12 + 2(n - 1)$. I rad 20 er det $a_{20} = 12 + 38 = 50$ seter. Det totale antallet er

$$S_{20} = \frac{20(12 + 50)}{2} = 620$$

Det er 620 seter.

■

1.80 Avgjør om følgene er aritmetiske. Finn i så fall d.

a) $4, 9, 14, 19, \ldots$

b) $2, 4, 8, 16, \ldots$

c) $10, 7, 4, 1, \ldots$

1.81 En aritmetisk følge har $a_1 = 7$ og $d = 4$. Finn a_{12}.

1.82 Regn ut $\sum_{k=1}^{5}(3k - 1)$.

1.83 Skriv $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$ med summetegnet.

1.84 Regn ut $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$.

1.85 Regn ut $4 + 7 + 10 + \ldots + 100$.

1.86 Regn ut summen av alle oddetall fra 1 til 99.

1.87 Regn ut summen av alle heltall fra 20 til 60.

1.88 En aritmetisk rekke har $a_1 = 6$, $d = 2$. Hvor mange ledd trengs for at summen skal bli minst 300?

1.89 I en stabel av tømmerstokker er det 20 stokker nederst og én mindre i hvert lag oppover, til det er 1 stokk øverst. Hvor mange stokker er det til sammen?

1.90 Du sparer 100 kr første uke, og øker innskuddet med 20 kr hver uke. Hvor mye har du spart etter 12 uker (uten renter)?

1.91 Summen av de tre første leddene i en aritmetisk følge er 27, og $a_1 = 5$. Finn d.

1.92 Hva blir utskriften?

Python

```
s = 0
for k in range(1, 5):
    s = s + (3 * k + 2)
print(s)
```

1.93 Skriv et program som regner ut summen $7 + 11 + 15 + \ldots + 99$.

1.94 Vis at summen av de n første oddetallene er n^2 ved hjelp av summeformelen.

1.3.2 Geometriske rekker

EKSEMPEL *Summen av fem ledd*

Finn $3 + 6 + 12 + 24 + 48$ ved hjelp av formelen.

Løsning

$$S_5 = 3 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 3 \cdot 31 = 93$$

Det stemmer med å legge sammen ledd for ledd: $3 + 6 + 12 + 24 + 48 = 93$.

■

EKSEMPEL *Kjedebrevet*

Du sender brevet til tre venner. Hver av dem sender det til tre nye, og slik fortsetter det i fem runder. Hvor mange brev er sendt til sammen?

Løsning

Antall brev er $3 + 9 + 27 + 81 + 243$, en geometrisk rekke med $a_1 = 3$, $k = 3$ og $n = 5$:

$$S_5 = 3 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 3 \cdot 121 = 363$$

Det blir sendt 363 brev.

■

EKSEMPEL *Kvotient mindre enn 1*

Finn summen av de fem første leddene i $100, 50, 25, \ldots$

Løsning

$$S_5 = 100 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}} = 100 \cdot \frac{\frac{31}{32}}{\frac{1}{2}} = 100 \cdot \frac{31}{16} = 193{,}75$$

■

1.95 Avgjør om følgene er geometriske. Finn i så fall k.

a) $2, 6, 18, 54, \ldots$

b) $5, 10, 15, 20, \ldots$

c) $64, 32, 16, 8, \ldots$

1.96 En geometrisk følge har $a_1 = 5$ og $k = 2$. Finn a_6.

1.97 En geometrisk følge har $a_1 = 4$ og $k = -2$. Finn de fem første leddene.

1.98 Finn $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$.

1.99 Finn summen av de seks første leddene i $1, 3, 9, 27, \ldots$

1.100 Finn summen av de fem første leddene i $48, 24, 12, \ldots$

1.101 Regn ut $\sum_{k=1}^{5} 3 \cdot 2^{k-1}$.

1.102 Hvor mange ledd har rekka $1 + 3 + 9 + \ldots$ hvis summen er 3280?

1.103 Hvor mange ledd trengs i $2 + 6 + 18 + \ldots$ for at summen skal bli større enn 10 000?

1.104 Et rykte sprer seg slik at hver som hører det, forteller det til to nye neste time. Første time forteller én person det til to. Hvor mange har hørt det etter 6 timer, medregnet den første?

1.105 En ball slippes fra 2 m og spretter opp til 80 % av høyden den falt fra. Hva er høyden etter 4 sprett?

1.106 Finn k når $a_1 = 3$ og $a_4 = 24$ i en geometrisk følge.

1.107 Hva blir utskriften?

Python

```
s = 0
ledd = 2
for n in range(5):
    s = s + ledd
    ledd = ledd * 2
print(s)
```

1.108 Skriv et program som finner hvor mange ledd i $1, 2, 4, 8, \ldots$ som trengs for at summen skal bli større enn 1 000 000.

1.109 Vis at hvis tre tall a, b, c er etterfølgende ledd i en geometrisk følge, er $b^2 = ac$.

1.4.1 Uendelige geometriske rekker

EKSEMPEL *Sum av en konvergent rekke*

Finn summen av $3 + 2 + \frac{4}{3} + ...$

Løsning

Her er $a_1 = 3$ og $k = \frac{2}{3}$. Siden $|k| < 1$, konvergerer rekka, og

$$S = \frac{3}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$$

■

EKSEMPEL *Negativ kvotient*

Finn summen av $8 - 4 + 2 - 1 + ...$

Løsning

Her er $a_1 = 8$ og $k = -\frac{1}{2}$, med $|k| < 1$. Da er

$$S = \frac{8}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{8}{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3}$$

■

EKSEMPEL *Rekke som divergerer*

Konvergerer $1 + 3 + 9 + 27 + ...$?

Løsning

Kvotienten er $k = 3$, og $|k| \geqslant 1$. Delsummene vokser over alle grenser, så rekka divergerer. Formelen $\frac{a_1}{1-k}$ gir $-\frac{1}{2}$, men den gjelder bare når $|k| < 1$.

■

EKSEMPEL *For hvilke x konvergerer rekka?*

For hvilke x konvergerer $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + ...$, og hva er summen?

Løsning

Her er $a_1 = 1$ og $k = 2x$. Rekka konvergerer når $|2x| < 1$, altså når $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Da er summen

$$S = \frac{1}{1 - 2x}$$

■

EKSEMPEL *Fra desimaltall til brøk*

Skriv 0,272727 ... som en brøk.

Løsning

Tallet er rekka $0{,}27 + 0{,}0027 + 0{,}000027 + ...$ med $a_1 = 0{,}27$ og $k = 0{,}01$. Summen er

$$\frac{0{,}27}{1 - 0{,}01} = \frac{0{,}27}{0{,}99} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

■

EKSEMPEL *Ballen som spretter*

En ball slippes fra 2 m og spretter opp til 80 % av høyden den falt fra, om og om igjen. Hvor langt beveger ballen seg til sammen?

Løsning

Første fall er 2 m. Høydene etter sprettene er 1,6, 1,28, ..., en geometrisk rekke med $a_1 = 1{,}6$ og $k = 0{,}8$ som summeres til

$$\frac{1{,}6}{1 - 0{,}8} = 8$$

Hver av disse høydene er tilbakelagt både opp og ned, så den totale lengden er $2 + 2 \cdot 8 = 18$ m.

■

1.110 Avgjør om rekkene konvergerer.

a) $5 + 1 + 0{,}2 + ...$

b) $2 + 4 + 8 + ...$

c) $3 - 3 + 3 - 3 + ...$

d) $10 - 5 + 2{,}5 - ...$

1.111 Finn summen av $12 + 6 + 3 + ...$

1.112 Finn summen av $5 + 1 + 0{,}2 + ...$

1.113 Finn summen av $18 - 6 + 2 - ...$

1.114 Regn ut $\sum_{k=0}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k$.

1.115 Skriv som brøk.

a) 0,111 ...

b) 0,636363 ...

1.116 Skriv 0,1666 ... som en brøk.

1.117 En konvergent geometrisk rekke har $a_1 = 6$ og sum 8. Finn k.

1.118 For hvilke x konvergerer $1 + 3x + 9x^2 + ...$? Finn summen.

1.119 For hvilke x konvergerer $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + ...$?

1.120 En ball slippes fra 5 m og spretter opp til 60 % av høyden den falt fra. Hvor langt beveger den seg til sammen?

1.121 Et pendel svinger ut 20 cm første gang, og hver svingning er 90 % av den forrige. Hvor langt beveger den seg til sammen (summen av alle utsvingene)?

1.122 Et legemiddel brytes ned slik at 30 % er igjen etter hver dose. Pasienten tar 100 mg hver dag. Hva går mengden mot rett etter en dose, på lang sikt?

1.123 Hva blir utskriften?

Python

```
s = 0
ledd = 8
for n in range(5):
    s = s + ledd
    ledd = ledd / 2
print(s)
```

1.124 Vis at hvis en rekke $a_1 + a_1k + a_1k^2 + \ldots$ med $|k| < 1$ har sum S, så er $k = 1 - \frac{a_1}{S}$.

1.4.2 Andre rekker

EKSEMPEL *Leddene går ikke mot null*

Konvergerer rekka $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots$?

Løsning

Leddene $\frac{k}{k+1}$ går mot 1 når k vokser, ikke mot 0. Da kan ikke rekka konvergere, og den divergerer. ∎

EKSEMPEL *En teleskoperende rekke*

Finn S_n og summen av den uendelige rekka $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Løsning

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Alle ledd i midten opphever hverandre, som en kikkert som skyves sammen. Når n vokser, går $\frac{1}{n+1}$ mot 0, så S_n går mot 1. Summen av den uendelige rekka er 1. ∎

1.125 Hvilke av rekkene må divergere fordi leddene ikke går mot 0?

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+2}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$

1.126 Forklar hvorfor leddene i en konvergent rekke må gå mot 0.

1.127 Hva går leddet $\frac{3k+1}{k}$ mot når k vokser? Konvergerer rekka med disse leddene?

1.128 Hva er det som gjør den harmoniske rekka spesiell?

1.129 Vis at $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

1.130 Finn S_5 for $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ved å skrive ut leddene.

1.131 Hvor mange ledd trengs i $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ for at delsummen skal være minst 0,99?

1.132 Finn summen av $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$.

1.133 Finn summen av $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

1.134 Hva blir utskriften?

Python

```
s = 0
for k in range(1, 4):
    s = s + 1 / (k * (k + 1))
print(round(s, 2))
```

1.135 Hva blir utskriften?

Python

```
s = 0
for k in range(1, 4):
    s = s + 1 / k
print(round(s, 2))
```

1.136 Skriv et program som finner hvor mange ledd av den harmoniske rekka som trengs for at delsummen skal bli større enn 5.

1.137 Hvorfor kan ikke en tabell med delsummer alene bevise at en rekke konvergerer?

1.138 Vis at rekka $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ divergerer, ved å sammenligne med den harmoniske rekka.

1.139 Rekka $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ har delsummer $S_n < 2$ for alle n, og leddene er positive. Hva sier det om rekka?

1.5.1 Sparing og lån

EKSEMPEL *Ti år med sparing*

Du setter inn 1000 kr i slutten av hvert år i 10 år, med 4 % rente per år. Hva er saldoen etter siste innskudd?

Løsning

$$1000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1} \approx 12\,006$$

Saldoen er omtrent 12 006 kr. Du har satt inn 10 000 kr, så renteinntekten er omtrent 2006 kr. ∎

EKSEMPEL *Terminbeløp og samlede renter*

Du tar opp et annuitetslån på 500 000 kr med 5 % rente per år over 10 år. Finn terminbeløpet og hvor mye du betaler i renter til sammen.

Løsning

$$T = 500\,000 \cdot \frac{1{,}05 - 1}{1 - 1{,}05^{-10}} \approx 64\,752 \text{ kr}$$

Totalt betaler du $10 \cdot 64\,752 \approx 647\,523$ kr. Rentene er derfor omtrent $647\,523 - 500\,000 = 147\,523$ kr. ∎

EKSEMPEL *Renter i et serielån*

Et serielån på 100 000 kr betales ned over 5 år med 20 000 kr i avdrag hvert år. Renten er 5 % av restgjelden i begynnelsen av året. Hva blir rentene til sammen?

Løsning

Rentene hvert år er 5000, 4000, 3000, 2000 og 1000. Det er en aritmetisk rekke med $a_1 = 5000$, $a_5 = 1000$ og $n = 5$:

$$S_5 = \frac{5(5000 + 1000)}{2} = 15\,000$$

Rentene er 15 000 kr til sammen. ▪

EKSEMPEL *Nåverdi av en serie utbetalinger*

Hva er nåverdien av 1000 kr utbetalt i slutten av hvert av de neste 5 årene, hvis renten er 3 % per år?

Løsning

$$\frac{1000}{1{,}03} \cdot \frac{1 - 1{,}03^{-5}}{1 - \frac{1}{1{,}03}} = 1000 \cdot \frac{1 - 1{,}03^{-5}}{0{,}03} \approx 4580$$

Nåverdien er omtrent 4580 kr. Det er så mye du må ha på en konto i dag for å kunne betale ut 1000 kr hvert år i fem år. ▪

1.140 Du setter inn 2000 kr i slutten av hvert år i 8 år. Renten er 3 % per år. Hva er saldoen etter siste innskudd?

1.141 Du sparer 300 kr i slutten av hver måned i 24 måneder. Renten er 0,5 % per måned. Hva er saldoen?

1.142 Du setter inn 3000 kr i slutten av hvert år i 20 år med 5 % rente. Hva er saldoen, og hvor mye av den er renter?

1.143 Du setter inn 1500 kr i begynnelsen av hvert år i 10 år med 2 % rente. Hva er saldoen etter 10 år?

1.144 Etter hvor mange år har du minst 50 000 kr hvis du setter inn 4000 kr i slutten av hvert år med 3 % rente?

1.145 Et annuitetslån på 300 000 kr har 3 % rente per år og løper i 6 år. Finn terminbeløpet og de samlede rentene.

1.146 Finn terminbeløpet i et annuitetslån på 50 000 kr med 6 % rente over 10 år.

1.147 Et serielån på 200 000 kr over 5 år har avdrag på 40 000 kr hvert år og 4 % rente av restgjelden. Finn rentene til sammen.

1.148 Hva er nåverdien av 1000 kr hvert år i slutten av de neste 8 årene, med 4 % rente?

1.149 Du får 100 000 kr om 3 år. Hva er nåverdien med 5 % rente per år?

1.150 En stiftelse skal betale ut 2000 kr i slutten av hvert år for alltid. Renten er 5 % per år. Hvor mye må stiftelsen ha på konto i dag?

1.151 Hva blir utskriften?

Python

```
s = 0
for ar in range(4):
    s = (s + 1000) * 1.05
print(round(s))
```

Setter eleven inn i begynnelsen eller slutten av året?

1.152 Skriv et program som regner ut hvor mange år det tar å betale ned et lån på 100 000 kr med 5 % rente per år, hvis du betaler 15 000 kr hvert år.

1.153 Per regner med renten $k = 0{,}03$ i spareformelen og får $B \cdot \frac{0{,}03^n - 1}{0{,}03 - 1}$. Hva er feil?

1.154 Forklar hvorfor rentene i et serielån danner en aritmetisk rekke, og finn differansen når lånet er L med n avdrag og rente p %.

Fasit

1.1.1 Følger og rekursive formler

1.1
5, 8, 11, 14

1.2
$a_1 = -3$, $a_2 = -4$ og $a_5 = 5$.

1.3
$a_3 = 8$ og $a_8 = 256$.

1.4
$-1, 2, -3, 4, -5$

1.5
4, 10, 16, 22, 28, så $a_5 = 28$.

1.6
100, 50, 25, 12,5, 6,25

1.7
$a_2 = 3$, $a_3 = 8$ og $a_4 = 63$.

1.8
Leddene øker med 3, så $a_n = 3n + 4$. Kontroll: $a_1 = 7$ og $a_4 = 16$.

1.9
Hvert ledd er det dobbelte av det forrige, så $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$. Kontroll: $a_1 = 3$ og $a_4 = 24$.

1.10
a) $a_1 = 5$ og $a_{n+1} = a_n + 3$
b) $a_n = 3n + 2$

1.11
2, 3, 5, 8, 13, 21, så $a_6 = 21$.

1.12
a) $a_0 = 1000$ og $a_{n+1} = a_n + 250$ (eller $a_1 = 1250$)
b) $1000 + 6 \cdot 250 = 2500$ kr

1.13
a) $a_n = 200 \cdot 2^n$
b) $a_5 = 200 \cdot 32 = 6400$

1.14
Nei. Fra a_1 til a_5 er det fire steg, så $a_5 = 3 + 4 \cdot 2 = 11$. Kari har lagt til 2 fem ganger.

1.15

```
5
13
29
61
```

1.16

```
a = 10
for n in range(6):
    print(a)
    a = a - 4
```

Utskriften er $10, 6, 2, -2, -6, -10$.

1.17
Startledd: $3 \cdot 1 + 2 = 5$. Regel: $a_{n+1} = 3(n+1) + 2 = 3n + 2 + 3 = a_n + 3$.

1.1.2 Rekursjon med programmering

1.18

```
[1, 4, 7, 10]
```

1.19
4. Verdiene av `a` er $3, 9, 27, 81$, og løkka stopper når $a \geqslant 50$.

1.20
`neste(1)` er 5, og `neste(5)` er 13.

1.21
$f(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

1.22

```
def a(n):
    if n == 1:
        return 5
    return a(n - 1) + 4
```

1.23
a) $a_1 = 10\,100$ og $a_2 = 10\,205$
b) Den vokser, siden 5 % av 10 000 er 500, og det er mer enn 400.

1.24
0,05 $a = 400$, så $a = 8000$.

1.25
$200\,000 \cdot 0{,}90^3 = 145\,800$ kr

1.26
$a_1 = 85\,000$, $a_2 = 69\,250$ og $a_3 = 52\,712{,}5$ kr.

1.27
$a_2 = 2020$ og $a_3 = 3060{,}4$ kr.

1.28

```
b = 10000
ar = 0
while b <= 15000:
    b = b * 1.04
    ar = ar + 1
print(ar)
```

Svaret er 11 år, siden $1{,}04^{10} \approx 1{,}48$ og $1{,}04^{11} \approx 1{,}54$.

1.29
8. Parene `(a, b)` er $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,5)$, $(5,8)$ og $(8,13)$.

1.30
Variabelen `a` endres aldri, så vilkåret `a > 0` er alltid sant og løkka kjører for alltid. En linje som `a = a - 1` inne i løkka retter feilen.

1.31
Funksjonen har ikke noe startledd, så den kaller seg selv uten stopp. Python avbryter med en feilmelding om at rekursjonen er for dyp.

1.32
$6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$. Det er 8 steg.

1.33

```
a = 1
for n in range(10):
    print(a)
    a = 2 * a + 1
```

Leddene er $1, 3, 7, 15, 31, \ldots$, altså $a_n = 2^n - 1$.

1.2.1 Direkte bevis

1.34
a) Sant: $2a + (2b + 1) = 2(a + b) + 1$.
b) Usant: $2 + 3 = 5$.
c) Usant: $3 \cdot 5 = 15$.

1.35
For $n = 1$ er $n^2 = 1 = n$, så $n^2 > n$ er galt. Også $n = 0$ er et moteksempel.

1.36
Med $a = 2$ og $b = -2$ er $a^2 = b^2 = 4$, men $a \neq b$.

1.37
$2 \cdot (-3) + 1 = -5$

1.38
La oddetallene være $2a + 1$ og $2b + 1$. Da er
$(2a+1)(2b+1) = 4ab + 2a + 2b + 1 = 2(2ab + a + b) + 1$,
som er et oddetall. ■

1.39
$2a + (2b + 1) = 2(a + b) + 1$, som er et oddetall. ■

1.40
La partallet være $2k$ og heltallet m. Da er $2k \cdot m = 2(km)$, som er et partall. ■

1.41
La partallet være $2k$. Da er $(2k)^2 = 4k^2$, som er delelig med 4. ■

1.42
$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$, som er et oddetall. ■

1.43
La tallene være n, $n+1$, $n+2$ og $n+3$. Summen er $4n + 6 = 4(n+1) + 2$. Det er 2 mer enn et multiplum av 4, så summen er aldri delelig med 4. ■

1.44
$a^2 + 4 - 4a = (a-2)^2 \geqslant 0$, så $a^2 + 4 \geqslant 4a$. ■

1.45
$(a+b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geqslant 0$. ■

1.46
$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 = n + (n+1)$. ■

1.47
Fire eksempler viser ikke at påstanden gjelder for alle heltall. Det trengs et bevis med en bokstav, eller et moteksempel hvis påstanden er gal. (Påstanden stemmer faktisk, siden $n^2 - n = n(n-1)$ aldri er negativ for heltall.)

1.48
> 2
> 6
> 12
> 20
> 30

Tallene er $n(n+1)$, produktet av to påfølgende heltall. Ett av dem er et partall, så produktet er et partall.

1.49
La $n = 2k+1$. Da er $n^2 + n = n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1)$, som er et partall. ■

1.2.2 Kontrapositive bevis og motsigelse

1.50
«Hvis n ikke er delelig med 5, er n ikke delelig med 10.»

1.51
«Hvis n er delelig med 5, er n delelig med 10.» Usann: $n = 5$ er et moteksempel.

1.52
«Hvis $x^2 \leqslant 4$, så er $x \leqslant 2$.» Den er sann, siden den opprinnelige er sann.

1.53
a) Ja, det er den kontrapositive.
b) Nei, det er den omvendte. Det kan være kaldt uten snø.

1.54
Kontrapositivt: Hvis $n = 2k$ er et partall, er $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ et partall. ■

1.55
Kontrapositivt: Er $n = 2k$ et partall, er $5n + 3 = 10k + 3 = 2(5k+1) + 1$ et oddetall. ■

1.56
Kontrapositivt: Er begge oddetall, $a = 2k+1$ og $b = 2m+1$, er $ab = 4km + 2k + 2m + 1 = 2(2km + k + m) + 1$ et oddetall. ■

1.57
Kontrapositivt: Hvis n ikke er delelig med 3, er $n = 3k+1$ eller $n = 3k+2$. Da er $n^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3(3k^2 + 2k)$ eller $n^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3(3k^2 + 4k + 1)$, og begge er delelige med 3. ■

1.58
Anta at N er det største heltallet. Da er $N+1$ også et heltall, og $N+1 > N$. Det er en selvmotsigelse. ■

1.59
Anta at $4a + 8b = 2023$. Venstresiden er $4(a+2b)$, delelig med 4, og dermed et partall. Men 2023 er et oddetall. Det er en selvmotsigelse. ■

1.60
Anta at $rx = s$ er rasjonal. Da er $x = \frac{s}{r}$, en kvotient av rasjonale tall, altså rasjonal. Det strider mot at x er irrasjonal. ■

1.61
Anta at $\sqrt{2} + 1 = s$ er rasjonal. Da er $\sqrt{2} = s - 1$ rasjonal, i strid med at $\sqrt{2}$ er irrasjonal. ■

1.62
Kontrapositivt bevis: Det er enklere å regne med $n = 3k+1$ eller $n = 3k+2$ (ikke delelig med 3) og vise at n^2 ikke er delelig med 3, enn å starte med at n^2 er delelig med 3.

1.63
> 3

Blant tallene fra 1 til 7 er bare 3 både oddetall og delelig med 3.

1.64
Anta at n er et positivt heltall med $n < \frac{1}{n}$. Ganger vi med $n > 0$, får vi $n^2 < 1$. Men for et positivt heltall er $n \geqslant 1$, så $n^2 \geqslant 1$. Det er en selvmotsigelse. ■

1.2.3 Induksjonsbevis

1.65
P(1): $1 = 1^2$. P(2): $1 + 3 = 4 = 2^2$. P(3): $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$.

1.66
Antakelsen er at $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. I trinnet viser vi at $1 + 2 + \ldots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

1.67
Grunnlag: $n = 1$ gir $2 = 1 \cdot 2$. Trinn: Anta at $2 + \ldots + 2k = k(k+1)$. Da er $2 + \ldots + 2k + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$. ■

1.68
Grunnlag: $1 = 1^2$. Trinn: Anta at summen til $2k-1$ er k^2. Da er summen til $2k+1$ lik $k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$. ■

1.69
Grunnlag: $1 = 2^1 - 1$. Trinn: Anta at summen til 2^{k-1} er $2^k - 1$. Da er summen til 2^k lik $2^k - 1 + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$. ■

1.70
Grunnlag: $5 - 1 = 4$. Trinn: Anta at $5^k - 1 = 4m$. Da er $5^{k+1} - 1 = 5(5^k - 1) + 4 = 20m + 4 = 4(5m+1)$. ■

1.71
Grunnlag: $1 - 1 = 0$, delelig med 3. Trinn: Anta at $k^3 - k = 3m$. Da er $(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = (k^3 - k) + 3k^2 + 3k = 3(m + k^2 + k)$. ■

1.72
Grunnlag: $a_1 = 3 = 4 \cdot 1 - 1$. Trinn: Anta at $a_k = 4k - 1$. Da er $a_{k+1} = a_k + 4 = 4k + 3 = 4(k+1) - 1$. ■

1.73
Grunnlag: $a_1 = 2 = 2 \cdot 3^0$. Trinn: Anta at $a_k = 2 \cdot 3^{k-1}$. Da er $a_{k+1} = 3 \cdot 2 \cdot 3^{k-1} = 2 \cdot 3^k$. ■

1.74
Grunnlag: $3 \geqslant 3$. Trinn: Anta at $3^k \geqslant 2k+1$. Da er $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k \geqslant 3(2k+1) = 6k + 3 \geqslant 2k + 3 = 2(k+1) + 1$. ■

1.75
Trinnet er galt for $k = 1$: Når gruppen har to hester, og vi fjerner én av gangen, har de to gruppene på én hest ingen hester felles, så vi kan ikke slutte at fargene er like. Trinnet fra $k = 1$ til $k = 2$ holder ikke.

1.76
> 1
> 4
> 9
> 16

Tallene er n^2, summen av de n første oddetallene.

1.77
Grunnlag: $1 \cdot 2 = 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$. Trinn: $\frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$. ■

1.78

Grunnlag: $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$. Trinn: $\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$. ■

1.79

Grunnlag: $1! = 1 = 2^0$. Trinn: Anta at $k! \geqslant 2^{k-1}$. Da er $(k+1)! = (k+1) \cdot k! \geqslant 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$, siden $k+1 \geqslant 2$. ■

1.3.1 Aritmetiske rekker

1.80

a) Ja, $d = 5$.

b) Nei, differansen er ikke konstant.

c) Ja, $d = -3$.

1.81

$a_{12} = 7 + 11 \cdot 4 = 51$

1.82

$2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40$

1.83

$\sum_{k=1}^{6} 2k$

1.84

$\frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$

1.85

$a_1 = 4$ og $d = 3$. Fra $4 + 3(n-1) = 100$ får vi $n = 33$. Summen er $\frac{33(4+100)}{2} = 1716$.

1.86

Det er 50 ledd, og summen er $\frac{50(1+99)}{2} = 2500$ (altså 50^2).

1.87

Det er $60 - 20 + 1 = 41$ ledd. Summen er $\frac{41(20+60)}{2} = 1640$.

1.88

$S_n = \frac{n(12+2(n-1))}{2} = n(n+5)$. For $n = 15$ er $S_{15} = 300$. Det trengs 15 ledd.

1.89

$1 + 2 + \ldots + 20 = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$

1.90

$a_{12} = 100 + 11 \cdot 20 = 320$, og $S_{12} = \frac{12(100+320)}{2} = 2520$ kr.

1.91

$S_3 = \frac{3(10+2d)}{2} = 27$ gir $10 + 2d = 18$, så $d = 4$. (Leddene er 5, 9, 13.)

1.92

38, siden $5 + 8 + 11 + 14 = 38$.

1.93

```
s = 0
for a in range(7, 100, 4):
    s = s + a
print(s)
```

Svaret er 1272. Med formelen: 24 ledd og $\frac{24(7+99)}{2} = 1272$.

1.94

Her er $a_1 = 1$ og $a_n = 2n - 1$, så $S_n = \frac{n(1+2n-1)}{2} = \frac{n \cdot 2n}{2} = n^2$. ■

1.3.2 Geometriske rekker

1.95

a) Ja, $k = 3$.

b) Nei, den er aritmetisk.

c) Ja, $k = \frac{1}{2}$.

1.96

$a_6 = 5 \cdot 2^5 = 160$

1.97

4, −8, 16, −32, 64

1.98

$S_6 = 2 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 126$

1.99

$S_6 = \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = \frac{728}{2} = 364$

1.100

$k = \frac{1}{2}$, og $S_5 = 48 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}} = 48 \cdot \frac{31}{16} = 93$

1.101

$3 + 6 + 12 + 24 + 48 = 93$

1.102

$S_n = \frac{3^n - 1}{2} = 3280$ gir $3^n = 6561 = 3^8$, så $n = 8$.

1.103

$S_n = 3^n - 1$. Vi trenger $3^n > 10\,001$. Siden $3^8 = 6561$ og $3^9 = 19\,683$, trengs $n = 9$ ledd.

1.104

Antall som hører det hver time er 2, 4, 8, ..., 64, summen er $2 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 126$. Med den første personen er det 127 som har hørt det.

1.105

Høyden er $2 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}8192$ m.

1.106

$3k^3 = 24$ gir $k^3 = 8$, så $k = 2$.

1.107

62, siden $2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$.

1.108

```
s = 0
ledd = 1
n = 0
while s <= 1000000:
    s = s + ledd
    ledd = ledd * 2
    n = n + 1
print(n)
```

Svaret er 20, siden $S_n = 2^n - 1$ og $2^{20} = 1\,048\,576$.

1.109

Er kvotienten k, er $b = ak$ og $c = ak^2$. Da er $b^2 = a^2k^2 = a \cdot ak^2 = ac$. ■

1.4.1 Uendelige geometriske rekker

1.110

a) Ja, $k = 0{,}2$.

b) Nei, $k = 2$.

c) Nei, $k = -1$.

d) Ja, $k = -0{,}5$.

1.111

$k = \frac{1}{2}$, og $S = \frac{12}{1 - \frac{1}{2}} = 24$.

1.112

$k = 0{,}2$, og $S = \frac{5}{0{,}8} = 6{,}25$.

1.113

$k = -\frac{1}{3}$, og $S = \frac{18}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{18}{4}}{3} = 13{,}5$.

1.114

$a_1 = 4$ og $k = \frac{1}{3}$, så $S = \frac{4}{1 - \frac{1}{3}} = 6$.

1.115

a) $\frac{0{,}1}{0{,}9} = \frac{1}{9}$

b) $\frac{0{,}63}{0{,}99} = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$

1.116

$0{,}1666\ldots = 0{,}1 + 0{,}0666\ldots = \frac{1}{10} + \frac{0{,}06}{0{,}9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$.

1.117

$\frac{6}{1-k} = 8$ gir $1 - k = \frac{3}{4}$, så $k = \frac{1}{4}$.

1.118

$k = 3x$, så $|3x| < 1$, altså $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$.

Summen er $\frac{1}{1 - 3x}$.

1.119

Kvotienten er $\frac{x}{2}$, så $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, altså $-2 < x < 2$.

1.120
Første fall er 5 m. Høydene $3 + 1{,}8 + \ldots$ gir $\frac{3}{0{,}4} = 7{,}5$, og de telles to ganger: 15 m. Totalt $5 + 15 = 20$ m.

1.121
$\frac{20}{1 - 0{,}9} = 200$ cm

1.122
Mengden er $100 + 100 \cdot 0{,}3 + 100 \cdot 0{,}3^2 + \ldots = \frac{100}{1 - 0{,}3} \approx 142{,}9$ mg.

1.123
15.5, siden $8 + 4 + 2 + 1 + 0{,}5 = 15{,}5$. Den uendelige summen er 16.

1.124
$S = \frac{a_1}{1 - k}$ gir $1 - k = \frac{a_1}{S}$, altså $k = 1 - \frac{a_1}{S}$. ■

1.4.2 Andre rekker

1.125
a) Må divergere: leddene går mot 1.
b) Leddene går mot 0, så testen sier ingenting.
c) Må divergere: leddene er -1 og 1, og går ikke mot 0.

1.126
Hvis delsummene S_n går mot et tall S, går også S_{n-1} mot S. Leddet $a_n = S_n - S_{n-1}$ går da mot $S - S = 0$.

1.127
$\frac{3k+1}{k} = 3 + \frac{1}{k}$ går mot 3. Leddene går ikke mot 0, så rekka divergerer.

1.128
Leddene $\frac{1}{k}$ går mot 0, men rekka divergerer likevel. Det viser at «leddene går mot 0» ikke er nok til at rekka konvergerer.

1.129
$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$. ■

1.130
$S_5 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Kontroll: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{5}{6}$.

1.131
$1 - \frac{1}{n+1} \geqslant 0{,}99$ gir $\frac{1}{n+1} \leqslant 0{,}01$, så $n + 1 \geqslant 100$ og $n = 99$.

1.132
$S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$, som går mot $\frac{3}{2}$.

1.133
$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$, så $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$, som går mot $\frac{1}{2}$.

1.134
0.75, siden $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$. Det stemmer med $1 - \frac{1}{4}$.

1.135
1.83, siden $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \approx 1{,}83$.

1.136
```
s = 0
n = 0
while s <= 5:
    n = n + 1
    s = s + 1 / n
print(n)
```
Svaret er 83.

1.137
En tabell viser bare endelig mange delsummer. Den harmoniske rekka vokser så sakte at delsummene ser ut til å stoppe opp, men de passerer til slutt alle tall. Konvergens må begrunnes med et argument.

1.138
Delsummene er $S_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$, altså halvparten av delsummene til den harmoniske rekka. Siden de vokser over alle grenser, gjør S_n det også. ■

1.139
Delsummene vokser hele tiden, men holder seg under 2. En voksende følge som er begrenset oppad, må samle seg mot et tall, så rekka konvergerer.
(Summen er $\frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}645$.)

1.5.1 Sparing og lån

1.140
$2000 \cdot \frac{1{,}03^8 - 1}{0{,}03} \approx 17\,785$ kr

1.141
$300 \cdot \frac{1{,}005^{24} - 1}{0{,}005} \approx 7630$ kr

1.142
Saldoen er $3000 \cdot \frac{1{,}05^{20} - 1}{0{,}05} \approx 99\,198$ kr. Innskuddene er 60 000 kr, så rentene er omtrent 39 198 kr.

1.143
$1500 \cdot \frac{1{,}02^{10} - 1}{0{,}02} \cdot 1{,}02 \approx 16\,753$ kr

1.144
Etter 11 år. (Etter 10 år er saldoen $4000 \cdot \frac{1{,}03^{10} - 1}{0{,}03} \approx 45\,856$ kr, og etter 11 år er den $\approx 51\,231$ kr.)

1.145
$T = 300\,000 \cdot \frac{0{,}03}{1 - 1{,}03^{-6}} \approx 55\,379$ kr.
Totalt $6 \cdot 55\,379 \approx 332\,276$ kr, så rentene er omtrent 32 276 kr.

1.146
$T = 50\,000 \cdot \frac{0{,}06}{1 - 1{,}06^{-10}} \approx 6793$ kr

1.147
Rentene er 8000, 6400, 4800, 3200 og 1600 kr, en aritmetisk rekke. Summen er $\frac{5(8000 + 1600)}{2} = 24\,000$ kr.

1.148
$1000 \cdot \frac{1 - 1{,}04^{-8}}{0{,}04} \approx 6733$ kr

1.149
$\frac{100\,000}{1{,}05^3} \approx 86\,384$ kr

1.150
Nåverdien er $\frac{2000}{1{,}05} + \frac{2000}{1{,}05^2} + \ldots$, en uendelig geometrisk rekke med $a_1 = \frac{2000}{1{,}05}$ og $k = \frac{1}{1{,}05}$. Summen er $\frac{2000/1{,}05}{1 - 1/1{,}05} = \frac{2000}{0{,}05} = 40\,000$ kr.

1.151
4526. Innskuddet settes inn først, og så legges renten til, så det er innskudd i begynnelsen av året.

1.152
```
gjeld = 100000
ar = 0
while gjeld > 0:
    gjeld = gjeld * 1.05 - 15000
    ar = ar + 1
print(ar)
```
Svaret er 9 år.

1.153
Vekstfaktoren for 3 % rente er $k = 1{,}03$, ikke 0,03. Vekstfaktoren inkluderer det opprinnelige beløpet.

1.154
Restgjelden minker med det samme avdraget $\frac{L}{n}$ hver termin, så rentene (en fast prosent av restgjelden) minker med $\frac{L}{n} \cdot \frac{p}{100}$ hver gang. Differansen er derfor $-\frac{Lp}{100n}$.